

AZ 1/F ZAJ MARKOVI TULAJDONSÁGÁNAK VIZSGÁLATA

Nagy István

V. éves fizikus hallgató

Témavezető :

Dr. Kiss László

Gingl Zoltán

JATE, Kísérleti Fizikai Tanszék

Szeged

1992

## AZ 1/F ZAJ MARKOVI TULAJDONSÁGÁNAK VIZSGÁLATA

Nagy István  
V. éves fizikus hallgató

Az 1/f zaj több mint fél évszázada tett felfedezése óta folynak kísérletek arra vonatkozóan, hogy eredetét megmagyarázzák. Ezen zajtípus előfordul a félvezető eszközöktől kezdve egészen a biológiai rendszerekig. Az időbeli és statisztikus tulajdonságai a mai napig nincsenek teljes egészében feltárva. Az elért eredmények ellenére még nem született olyan általánosan alkalmazható modell, mely gyakori előfordulására és speciális tulajdonságaira egyaránt választ adna.

Az 1/f zaj statisztikus elemzése során merült fel a markovi tulajdonság ellenőrzésének gondolata. A Markov-folyamatokat leíró átmeneti valószínűségek 1/f zajok esetében való mérése egy rekurziós formula felállítását teszi lehetővé. Ez egyben az 1/f folyamatok egyszerű, egy elemi Markov-folyamatot feltételező iterációs modelljét is jelentené. A rekurzió elvégzésével kapott zaj tulajdonságait az eredeti folyamatéval összehasonlítva vonunk le következtetéseket. A rekurziót két, számítógéppel modellezett, Markov-folyamattal teszteltük. A vizsgálatokhoz szükséges 1/f zajok számítógépes szimulációkból és valódi fizikai rendszerekből származnak.

Nagy különböző eredetű Gauss-eloszlású 1/f zaj vizsgálatából azt kaptuk, hogy nem elegendő az átmeneti valószínűségek ismerete az 1/f zajok időbeli leírásához, az 1/f folyamatok nem jellemezhetők elsőrendű Markov-folyamatként.

Témavezető : Dr. Kiss László adjunktus,  
Ginçl Zoltán tanársegéd  
JATE, Kísérleti Fizikai Tanszék

## TARTALOMJEGYZÉK

1.	Bevezetés.....	2
2.	Az $1/f$ zaj és a markovi tulajdonság.....	3
3.	A mérési elv.....	6
4.	Az algoritmus tesztelése.....	10
5.	Gaussi $1/f$ zajok vizsgálata.....	14
5.a	Számítógépes modellek.....	15
5.b	Kísérleti modellek.....	20
6.	Az eredmények összefoglalása.....	24

## 1. BEVEZETÉS

E dolgozat tárgya egy speciális zajtípus, melyet  $1/f$  zajnak neveznek. A század első felében kezdődő elektronikai mérések során figyeltek fel rá, mint az alacsony frekvenciákon erős többlettel rendelkező zajra [1]. A későbbi vizsgálatok pontos definíciót és számos modellt eredményeztek [1,2]. Aktualitását azonban nem vesztette el, ugyanis a vizsgálatok során kiderült, hogy nemcsak az elektronika területén fordul elő, hanem olyan folyamatról van szó, amely általánosan megtalálható a természeti jelenségek körében [3]. A felépített modellek azonban gyakran csak egy-egy speciális területen érvényesek, a zajtípus eredetére vonatkozó általános magyarázattal nem tudnak szolgálni.

Célunk az  $1/f$  zaj egyszerű, egy elemi folyamatot feltételező modelljének vizsgálata. Ez az  $U_{n+1}=T(U_n)$  iterációs egyenleten alapul, amely sztochasztikus függést biztosít az általa szolgáltatott értékek között. Olyan algoritmust készítünk, amely a Markov-folyamatokat jellemző átmenetmátrixok felhasználásával végzi az említett iterációt. Átmenetmátrix az  $1/f$  folyamatokhoz is rendelhető, ily módon lehetőség nyílik a markovi tulajdonság vizsgálatán keresztül egy iterációs modell felállítására.

A vizsgált  $1/f$  folyamataink számítógépes modellekből és valódi fizikai rendszerekből származnak. Négy zajforrást készítünk, melyek a folyamat előállításának módjában különböznek. Ezzel alkalom adódik a különböző eredetű  $1/f$  zajok kísérleti vizsgálatára. Valamennyi a Gauss-eloszlást követi, amely a legáltalánosabban előforduló zajtípus.

## 2. AZ $1/f$ ZAJ ÉS A MARKOVI TULAJDONSÁG

A vizsgálatainkban szereplő folyamatok véletlen jellegűek. A véletlen események mögött statisztikus törvényszerűségek húzódnak meg. Emiatt az analóg és számítógépes modelljeink jellemzőinek leírását a valószínűségelmélet segítségével tehetjük meg.

### 2.a $1/f$ folyamatok

Ha a különféle eredetű zajokat a teljesítménysűrűség-spektrumuk alapján csoportosítjuk, azt mondhatjuk, hogy az  $1/f$  zajok a fehér és az  $1/f^2$  spektrumú folyamatok között találhatók. A konstans teljesítménysűrűség-spektrumú zajokat fehérnek nevezzük:  $S(f)=\text{konst.}$  Ilyen alakban a zaj energiáját kiszámítva, végtelennek adódik. Az autokorrelációs függvény a Dirac- $\delta$  függvény, ami azt jelenti, nincs korreláció a zajfolyamat egyes értékei között. A reális fehérzajú jelek sávkorlátoltak. Fehérzajt mutat például egy  $R$  értékű ohmos ellenállás. Ezt a zajt termikus zajnak is nevezik,  $T$  hőmérsékleten  $S(f)=4kTR$  a spektrum értéke, konstans, ahol  $k$  a Boltzmann-állandó [6]. Ha a teljesítménysűrűség-spektrum  $S(f)\sim 1/f^2$  alakú, akkor  $1/f^2$ -zajról beszélünk. A fehér zajhoz hasonlóan ez is gyakran előfordul. Ez azzal magyarázható, hogy a fizikai rendszerekben gyakori jelenség, hogy egyik mennyiség a másik integráltjaként (vagy deriváltjaként) adódik. A Fourier-transzformáció

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n \cdot F(f) \quad (1)$$

tulajdonsága miatt a fehér zaj (időbeli) integráltjaként adódó zaj  $1/f^2$ , az  $1/f^2$  zaj deriváltjaként adódó zaj pedig fehér spektrumú.  $1/f^2$  zajt mutat például egy Brown-mozgást végző részecske [7].

Az  $1/f$  zajok körébe az  $1/f^\alpha$ , ahol  $\alpha \approx 1$ , spektrumú zajok tartoznak. A szigorúan  $\alpha=1$  kitevőjű jel végtelen energiájú, reális esetben tehát sávkorlátozottnak kell lennie. Az alsó határfrekvencia meghatározhatósága a mérések véges időtartama miatt korlátozott. Félvezető eszközökre  $10^{-6}$  Hz frekvenciáig kimutatható az  $1/f$  függés. Más rendszerek esetében ez az alsó határfrekvencia  $10^{-10}$  Hz is lehet, ami 300 éves ciklusoknak felel meg [3].

## 2.b Markov-folyamatok

Egy diszkrét (véges vagy végtelen sok) állapottal rendelkező fizikai folyamat időbeli állapotváltozásainak sorozatát Markov-folyamatnak nevezzük, ha leírható az átmeneti valószínűségek segítségével [6,7]. Tegyük fel, hogy egy  $U(t)$  zajfolyamat véletlen amplitúdóértékei ilyen állapotváltozást írnak le. A zajfolyamat amplitúdóit a  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$  diszkrét időpillanatokban megfigyelve az  $U(t_1), U(t_2), \dots, U(t_n), \dots$  értékeket kapjuk. Ha bármely ilyen megfigyelési sorozat esetén teljesül, hogy egy állapot bekövetkezésének valószínűsége csak az előző  $m$  állapot függvénye, azaz

$$P ( U(t_{n+1}) | U(t_1), U(t_2), \dots, U(t_n) ) = P ( U(t_{n+1}) | U(t_{n-m+1}), \dots, U(t_n) ) , \quad (2)$$

akkor a folyamat  $m$ -edrendű Markov-folyamat. Ez felfogható úgy, hogy a folyamat  $m$  időlépésnyi memóriával rendelkezik. Az  $m=1$  esetet, azaz elsőrendű Markov-folyamatot vizsgáltunk. Tegyük fel, hogy a mérés során nemcsak az idő, hanem a zaj amplitúdóértékei is diszkréttek:  $U_1 < U_2 < U_3 < \dots < U_n$ . Ha a folyamat stacionárius, a szomszédos időpillanatok közötti átmeneti valószínűségek nem függenek az időtől és ezen valószínűségeket csak az amplitúdóértékek határozzák meg. Ezen átmeneti valószínűségek a valószínűségi átmenetmátrixot adják meg:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} p(U_1|U_1) & \dots & p(U_1|U_n) \\ \vdots & & \\ p(U_n|U_1) & & p(U_n|U_n) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

ahol  $p(U_i|U_j) \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$ .

Az elsőrendű Markov-folyamatok ilyen átmenetmátrixszal írhatók le. Vizsgálatainkban kísérletet tettünk arra, hogy az 1/f folyamatokat is ilyen átmenetmátrixszal jellemezzük.

### 3. A MÉRÉSI ELV

A módszer, amely alapján a zajfolyamatok vizsgálatát végeztük, arra épül, hogy egy  $p(U_n)$  elsőrendű valószínűségi sűrűségfüggvényével adott véletlen folyamat numerikusan visszagenerálható [8]. A tétel rövideje lehetőséget ad az ismertetésére: Legyen adott a  $\xi$  valószínűségi változó  $f(x)$   $x \in [a, b]$  sűrűségfüggvénye ( $P(\xi = x) := f(x)$ ), melynek eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \int_a^x f(y) dy \quad (4)$$

Legyen  $v$  egyenletes eloszlású véletlen szám a  $[0, 1)$  intervallumban, ekkor  $F^{-1}(v)$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye  $F(x)$ , ugyanis

$$P(F^{-1}(v) \leq x) = P(v \leq F(x)) = F(x) \quad (5)$$

Vizsgálatainkban az  $f(x)$  sűrűségfüggvényt az  $x$  változó diszkrét értékeinél adjuk meg:  $P(\xi = x_i) := p_i$ . Az eloszlás függvényt ekkor az

$$F(x_i) = P(\xi < x_i) = \sum_{j: x_j < x_i} p_j \quad (6)$$

alakban kapjuk. Az  $F^{-1}$  inverz függvény nem minden helyen lehet értelmezett, ezért  $F^{-1}$  helyett a

$$G(v) = \min(j \mid v_i < \sum_{k=1}^j p_k) \quad (7)$$

inverzfüggvényt alkalmazzuk. A feladat tehát a  $P(\xi = x_i) = p_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  valószínűségekkel megadott diszkrét valószínűségi



változó generálása.

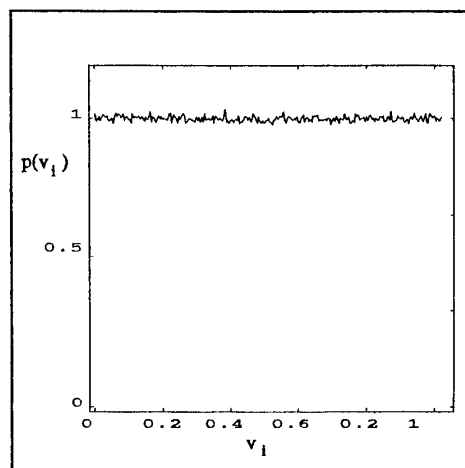
Az alkalmazott algoritmus jobban látható, ha bevezetjük a

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 \\ q_1 &= p_0 + p_1 \\ &\vdots \\ q_n &= p_0 + \dots + p_n \end{aligned} \quad (8)$$

jelölést. Ekkor egymásután generálva a  $v_i$  egyenletes eloszlású számokat, a  $G(v_i)$  függvény értéke azon  $j$  index megkeresését jelenti, melyre  $q_{j-1} \leq v_i < q_j$  teljesül. Ekkor a tétel szerint a  $G(v_i)$  értékek a megadott diszkrét eloszlást követik.

Az 1. ábrán a számítógéppel generált  $v_i$  véletlen számok sűrűségfüggvénye látható.

(A visszagenerálást végző algoritmus tesztelését néhány nevezetes sűrűségfüggvényű zajfolyamat generálásával végeztük.)

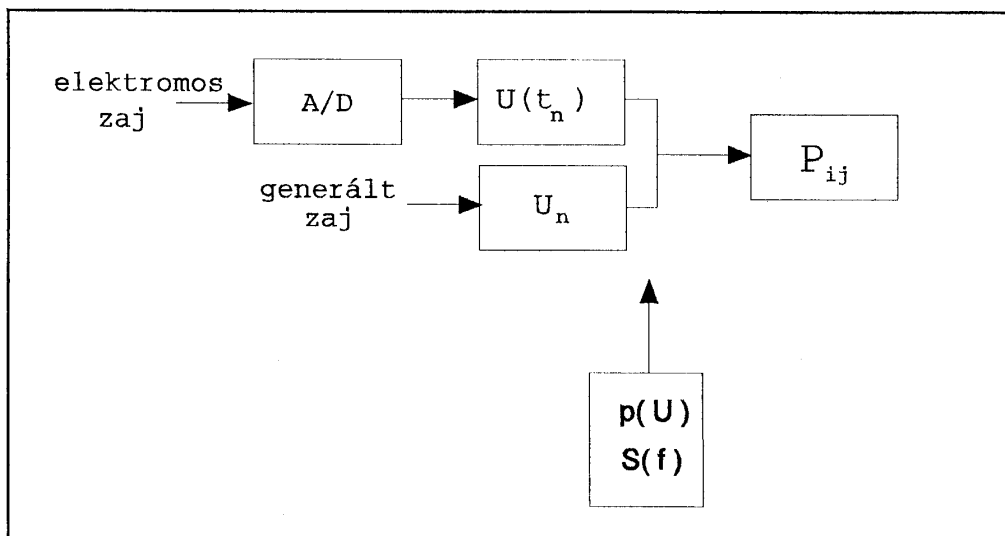


1. ábra  
Az alkalmazott véletlenszám-generátor sűrűségfüggvénye 5000\*1024 adatból.

Tehát ha adott valamely  $U_n$  véletlen változó  $p(U_n)$  elsőrendű valószínűségi sűrűségfüggvénye, előállítható a zajfolyamatnak egy olyan realizációja, melynek a sűrűségfüggvénye pontosan  $p(U_n)$ . Általánosítva ezt az eljárást két dimenzióra, egy  $p(U_{n+1}|U_n)$  másodrendű feltételes sűrűségfüggvényből generálhatunk egy olyan  $U'_1, U'_2, \dots, U'_n, \dots$  véletlen folyamatot, melynek  $p(U_{n+1}|U_n)$  a

másodrendű feltételes sűrűségfüggvénye. Ezt a generálást egy  $U'_{n+1}=T(U'_n)$  rekurzióval végezzük (ahol  $T$  két  $v_i$  véletlen szám és a feltételes sűrűségfüggvény felhasználásával egy véletlen számot szolgáltat). Így valamely  $U_i'$  érték csak az előző érték függvénye, azaz elsőrendű Markov-folyamatot kapunk vissza. A  $p(U_{n+1}|U_n)$  sűrűségfüggvény a változói diszkrét értékénél van megadva. Az általunk vizsgált elsőrendű stacionárius átmenetvalószínűségek mátrixa azonosítható ezzel a sűrűségfüggvénnyel.

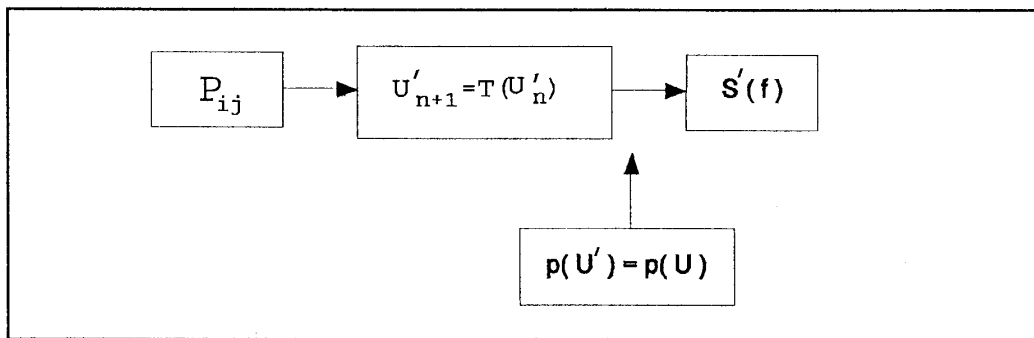
Célunk annak eldöntése, hogy a gaussi 1/f zaj rendelkezik-e a reprodukálhatóságot maga után vonó markovi tulajdonsággal. Az 2. ábrán a vizsgált zajfolyamatok feldolgozási folyamata látható.



2. ábra Az átmenetmátrix előállítása.

A vizsgált zajok számítógépes és kísérleti modellekből származnak. A kísérleti elektromos zajokat szűrjük, majd egy A/D átalakítóval 8 bitre digitalizáljuk és egy (IBM/AT 486-os)

számítógéppel dolgozzuk fel. Relatív gyakoriságok mérésével (számlálással) előállítjuk a  $p(U)$  sűrűségfüggvényt és az átmeneti valószínűség mátrix elemeit. Az  $S(f)$  spektrumot Fourier transzformációval átlagolásból kapjuk. (Az átlagolás szükséges, mert a statisztikus folyamatok véges megfigyelési időtartam alatt meghatározott paramétereit (így a spektrum egyes értékei is) mindig csak becsült értékek, és ezek is statisztikusan ingadoznak az elméleti értékek körül. Hogy ez a statisztikai hiba kicsi maradjon, az egymástól független méréseket átlagolni kell.)



3. ábra A zajfolyamat visszagenerálása az átmenetmátrixból.

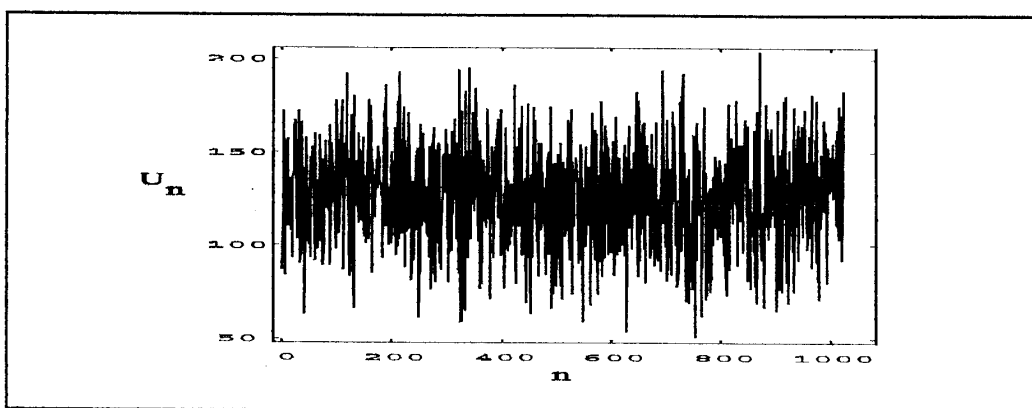
Az alkalmazott módszer lényege a következő (2.,3. ábra). Egy  $p(U_n)$  sűrűségfüggvényű,  $S(f)$  spektrumú zajfolyamatot vizsgálva az átmenetmátrixból visszagenerálunk egy elsőrendű Markov-folyamatot. Ezenkívül az így kapott véletlen folyamatból ismét meghatározzuk a  $p(U')$  sűrűségfüggvényt. Ez megegyezik az eredeti folyamatéval:  $p(U_n) = p(U'_n)$ , melyet a generálás módja biztosít. Ugyanakkor a folyamat spektrumáról nem tudunk biztosat, valamely  $S'(f)$  lesz. Ha az  $S(f) = S'(f)$  eset is fennáll, akkor az eredeti zajfolyamat elsőrendű Markov-folyamat.

#### 4. AZ ALGORITMUS TESZTELÉSE

A 2. és 3. ábrán látható vizsgálatot két, számítógéppel generált Markov-folyamattal tettük. Egyikben egy Gauss-eloszlású fehérzajt szolgáltató véletlenszámgenerátort alkalmaztunk, a másik zajfolyamat pedig egy Brown-mozgás modellezése.

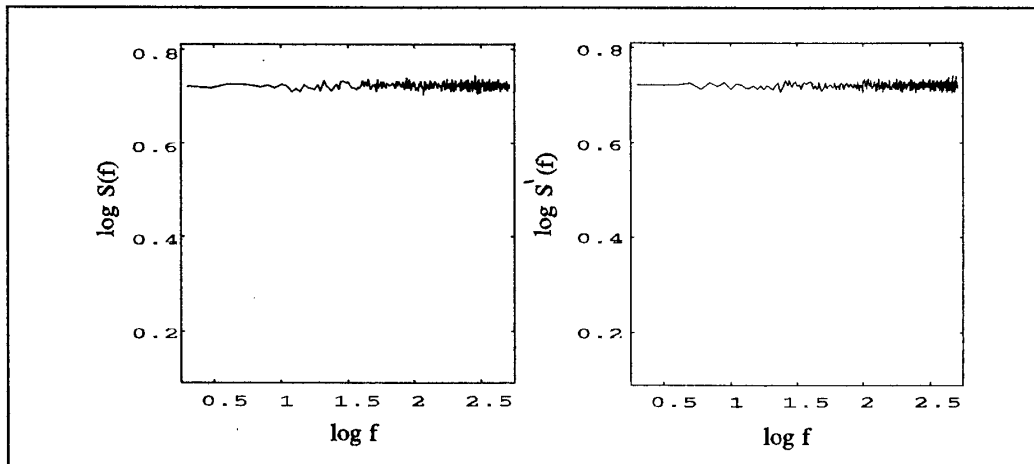
##### 3.a Fehérzaj

Egy  $N(0,1)$  paraméterű Gauss-eloszlású fehérzajt generáltunk. Ez a zajtípus nem rendelkezik additív memóriával, az egyes zajértékek teljesen függetlenek egymástól (a másodrendű sűrűségfüggvénye a  $\rho=0$  korrelációs együttható miatt szeparálható). A módszert alkalmazva a gaussi fehér zajra, az eredeti zajfolyamat jellemzőit kapjuk vissza. A visszaállított zajfolyamat időbeli képe a 4. ábrán látható.



4. ábra A visszaállított fehérzaj időfüggvénye.

Az 5. ábrán az eredeti és a visszagenerált zajfolyamat spektrumát láthatjuk.



5. ábra Az eredeti és a visszagenerált fehérzaj spektruma (5000\*1024 adatból).

### 3.b Brown-mozgás

Egy olyan egydimenziós bolyongást vettünk alapul, amelyben az  $U_n$  zajértékeket a  $[0,255]$  egész számok tartományán bolyongó részecske koordinátái jelentik. A következő feltevéseket tettük:

1. legyen a bolyongás szimmetrikus, azaz valamely  $U_n = i \in [1,254]$  állapotból az  $i+1$  vagy az  $i-1$  állapotba  $1/2 - 1/2$  valószínűséggel lép a részecske, míg az  $i$  állapotba pedig  $p=0$  valószínűséggel;
2. az  $U_n=0$  vagy az  $U_n=255$  állapotból az  $1$  ill.  $254$  állapotba  $p=1$  valószínűséggel lép a részecske.

Ezen feltevésekkel az átmeneti valószínűségeket a következő

mátrix adja:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (9)$$

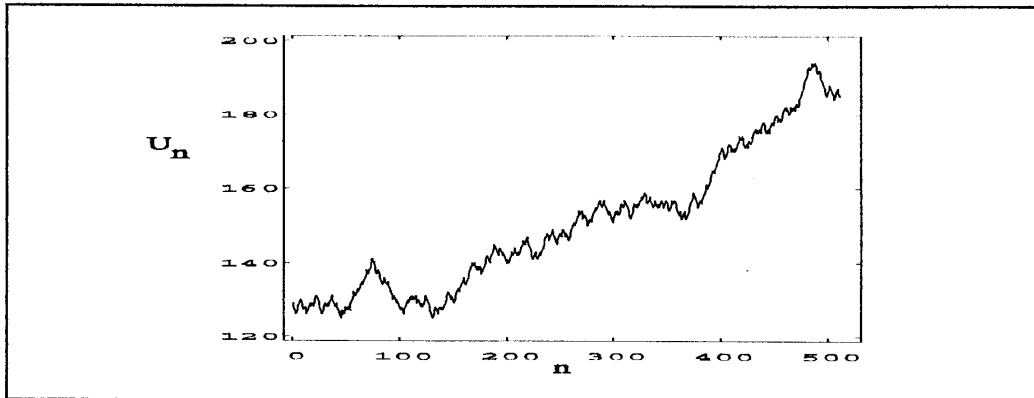
A bolyongást a  $v_1 \in [0,1)$  egyenletes eloszlású véletlen számokat szolgáltató generátor segítségével építettük fel. Az  $U_n \in [1,244]$  pontban lévő bolyongó részecske következő helyzetét az  $U_{n+1} = U_n + V_n$  összeg adja, ahol

$$V_n = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } v_n \geq 0.5 \\ -1 & , \text{ ha } v_n < 0.5 \end{cases} \quad (10)$$

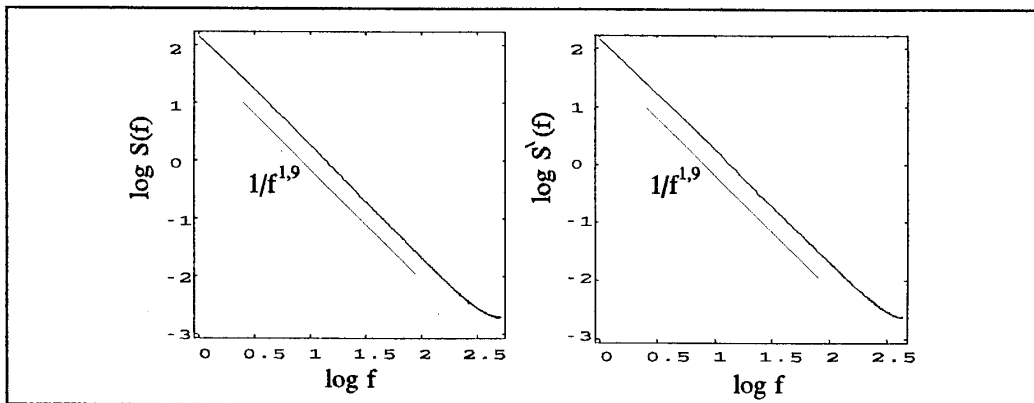
A  $V_1, V_2, \dots$  egymástól független, véletlen számok, melyek csak a  $\pm 1$  értékeket vehetik fel  $1/2 - 1/2$  valószínűséggel. Ekkor  $U_n$  előállítható az

$$U_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (11)$$

összeggel. Így a mozgás valamiféle additív memóriával rendelkezik, a zajfolyamat korrelációja erős. A 6. ábrán a Brown-mozgást, az eredeti és a visszagenerált zaj spektrumát pedig a 7. ábrán láthatjuk.



6. ábra A Brown-mozgás időbeli képe.



7. ábra Az eredeti és a visszanyert Brown-mozgás spektruma (adatok száma  $5000 \cdot 1024$ ).

## 5. GAUSSI 1/F ZAJOK VIZSGÁLATA

Az előzőekben látott lejárást négy különböző eredetű gaussi 1/f zajra alkalmaztuk. Ebből két zajfolyamatot számítógéppel szimuláltunk.

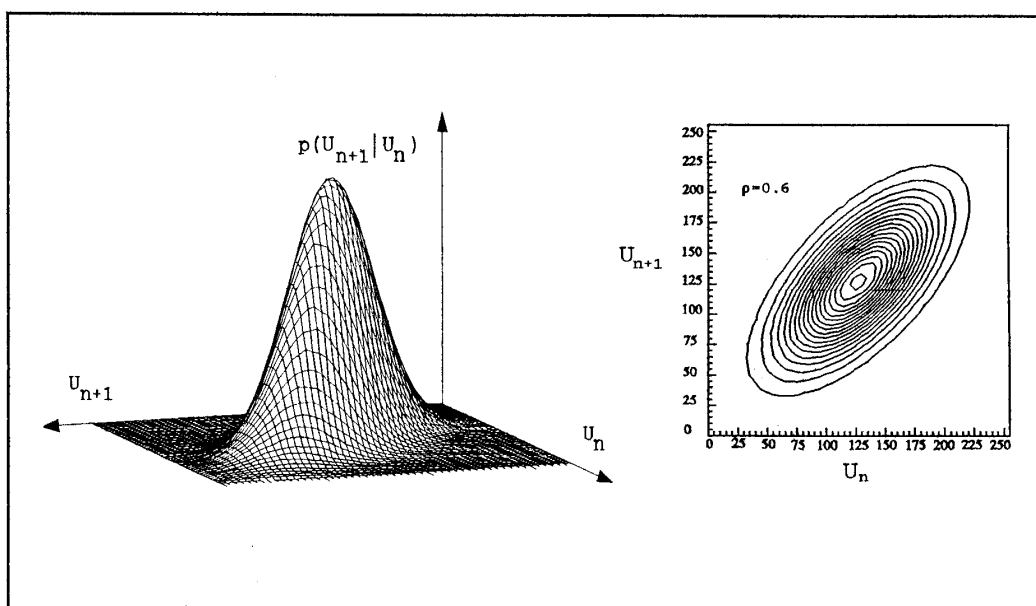
Az 1/f folyamatok hosszútávú memóriával rendelkeznek. Az átmenetmátrix előállításánál marad egy szabad paraméter, mégpedig a zajfolyamat  $\rho$  korrelációs együtthatója ( $0 < |\rho| < 1$ ). Kis korreláció esetén a fehér zajhoz hasonló átmenetmátrixot kapunk. Erős korreláció esetén pedig az átmenetmátrix főátlótól távoli elemei praktikusán nullának vehetők, hasonlóan a Brown-mozgásnál látottakhoz.

A kísérleti 1/f zajokat vizsgálat előtt sávkorlátozottá tesszük. Az így kapott folyamat tehát valamely  $f_{\max}$  határfrekvenciánál magasabb tagokat nem tartalmaz. Az átmenetmátrix készítésekor az egymást követő  $U_n, U_{n+1}$  értékek között eltelt időt csak az  $f_{mv}$  mintavételi frekvencia határozza meg. Ha gyors a mintavételezés, erősen korrelált lesz a jel. Ezen zajfolyamatoknál, hogy ne túlkorrelált jelet mérjünk, a mintavételi tételnek [13] megfelelő,  $f_{mv} = 3f_{\max}$  mintavételi frekvenciával mértünk. (A számítógéppel szimulált zajok esetén a feladat annyiban egyszerűbb, hogy a korreláció adott.)

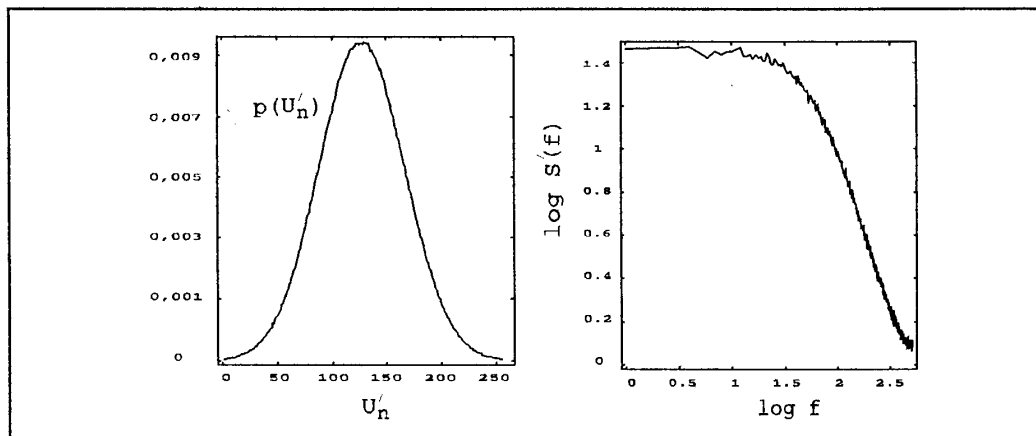
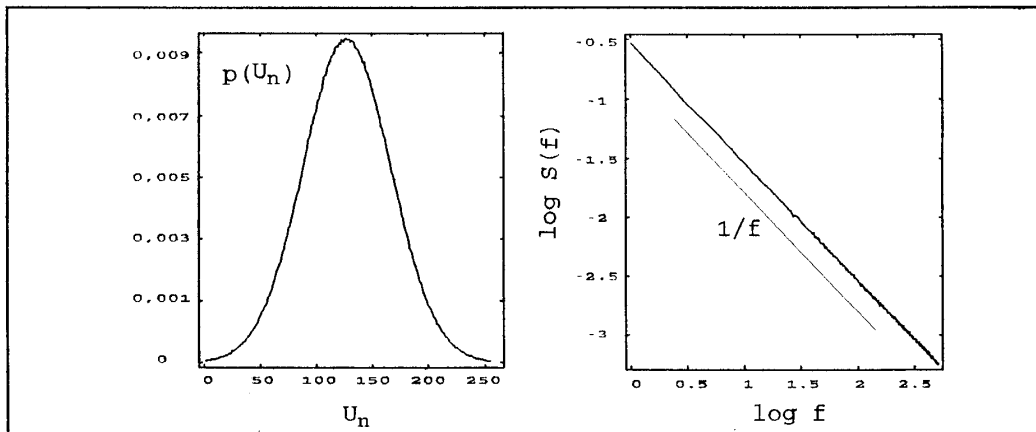


## 5.a Számítógépes modellek

Az első, komputerrel generált  $1/f$  zajmodellben egy Gauss-eloszlású fehérzajt Fourier-transzformálunk. A zajértékeket egy véletlenszám-generátorral állítjuk elő, majd a frekvenciatartományban  $1/f$  zajjává skálázzuk át. Inverz Fourier-transzformációval egy Gauss-eloszlású  $1/f$  zajt kapunk. A kapott folyamathoz  $\rho=0,6$  korelációs együttható tartozik. A 8. ábrán a zajfolyamat másodrendű valószínűségi sűrűségfüggvényét és metszeteit láthatjuk. (A metszetként kapott ellipszisek excentricitását pontosan a  $\rho$  korelációs együttható határozza meg.) Az eredeti és visszagenerált zaj sűrűségfüggvényét és spektrumát a 9. és a 10. ábrán láthatjuk.



8. ábra Az első, számítógéppel generált folyamat másodrendű sűrűségfüggvénye és metszetei (adatok száma  $260 \cdot 10^6$ ).

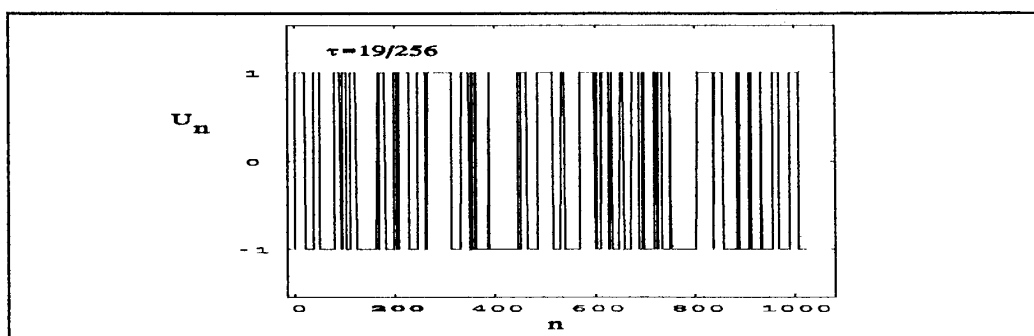


9.,10. ábra Az első, számítógéppel generált (eredeti) folyamat sűrűségfüggvénye és spektruma (fent), és a visszanyert folyamat sűrűségfüggvénye és spektruma (lent).

A kapott sűrűségfüggvények megegyeznek, viszont a visszaillesztett folyamat spektruma lorentzi. Tehát a fenti módon generált  $1/f$  zaj nem elsőrendű Markov-folyamat.

A másik komputermodeellt egymástól független lorentzi spektrumú folyamatok összegzésével nyerjük. Lorentzi spektrumú folyamatot Poisson-folyamatból kapunk. Egy elemi Poisson-folyamat zajértékeit pedig valamely esemény két egymás utáni bekövetkezései között eltelt diszkrét időlépések számából kapjuk.

Az esemény, melyet figyelünk a már látott egyenletes eloszlású generátor véletlen  $v_i \in [0,1)$  értékeinek a  $[0, \tau]$  intervallumban való előfordulása, ahol  $0 < \tau < 1$  egy általunk megadott szám. Egy algoritmussal azt számláljuk, hány darab  $v_i$  érték szükséges, azaz mennyi idő telik el, míg valamely  $v_i \in [0, \tau]$ . Ezen diszkrét időértékek egy  $\tau$  paraméterű exponenciális eloszlású Poisson-folyamatot alkotnak [9]:  $p(x) = \tau \cdot \exp(-\tau \cdot x)$ . A Poisson-folyamat véletlen értékeit kapcsolási időpillanatoknak tekintve egy random triggerelt jelet készítünk, melynek amplitúdója a  $\pm 1$  értékeket veszi fel. Egy, a  $\tau = 19/256$  paraméterrel indított jel a 11. ábrán látható.



11. ábra A "random-szignál" időbeli képe.

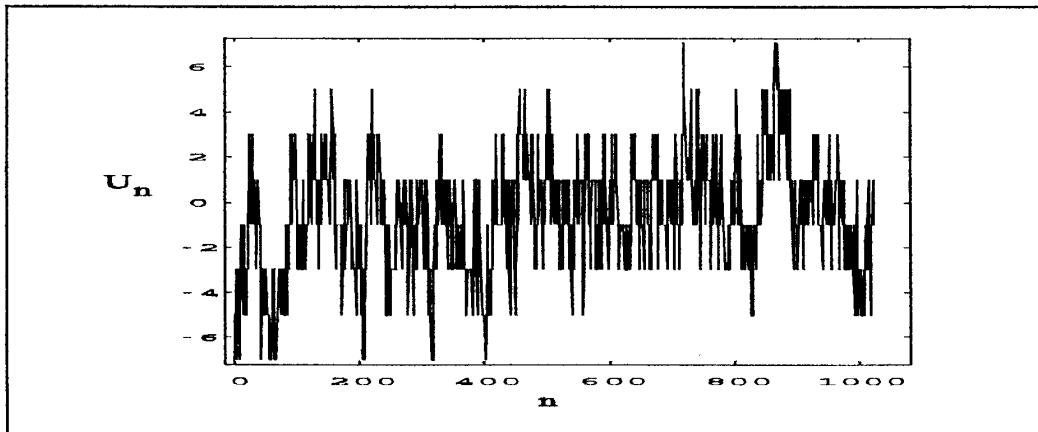
Egy ilyen jel spektruma lorentzi [7]:

$$S(\omega) = c \frac{\frac{1}{\tau}}{1 + (\omega \frac{1}{\tau})^2} \quad (12)$$

Ha több egymástól független Poisson-folyamatot összegzünk úgy, hogy a  $\tau$  paraméter  $g(\tau) = \tau$  eloszlású valamely  $[\tau_1, \tau_2]$  intervallumban, akkor a kapott zaj spektruma  $1/f$  [4]:

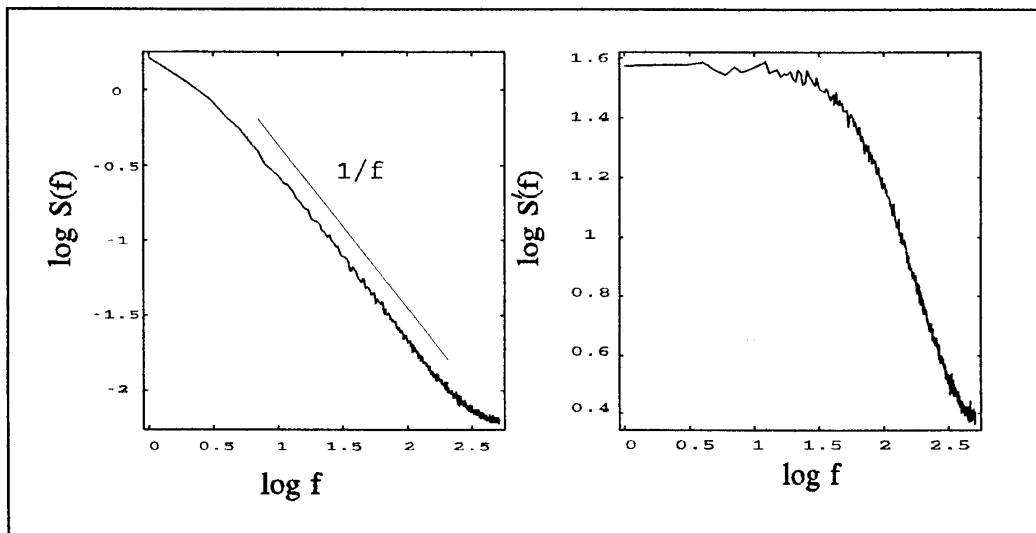
$$S(f) \approx \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{\tau}}{1 + (\omega \frac{1}{\tau})^2} g(\tau) d\tau \approx \frac{1}{\omega \ln(\frac{\tau_2}{\tau_1})} (\tan^{-1} \omega \tau_2 - \tan^{-1} \omega \tau_1) \approx \frac{1}{f} \quad (13)$$

8 különböző  $\tau$  paraméterű Poisson-folyamatot összegeztünk. Az így kapott zajfolyamat időbeli képe a 12. ábrán látható.



12. ábra Független Poisson-folyamatok összegzésével nyert zajfolyamat.

Az eredeti és az átmenetmátrixból visszagenerált folyamat spektruma a 13. ábrán látható.

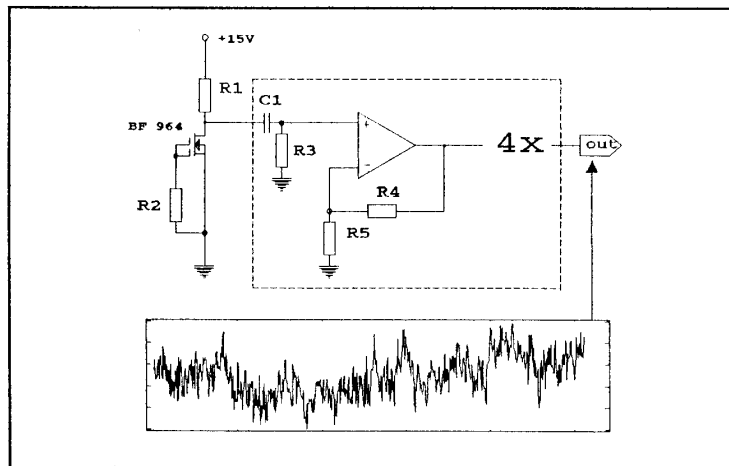


13. ábra Független Poisson-folyamatok összegzésével kapott zaj spektruma és a visszagenerált folyamat spektruma.

Ismét lorentzi spektrumot kaptunk. Tehát az elosztott időállandójú Poisson-folyamatok szuperpozíciójával kapott  $1/f$  zaj sem Markov-folyamat.

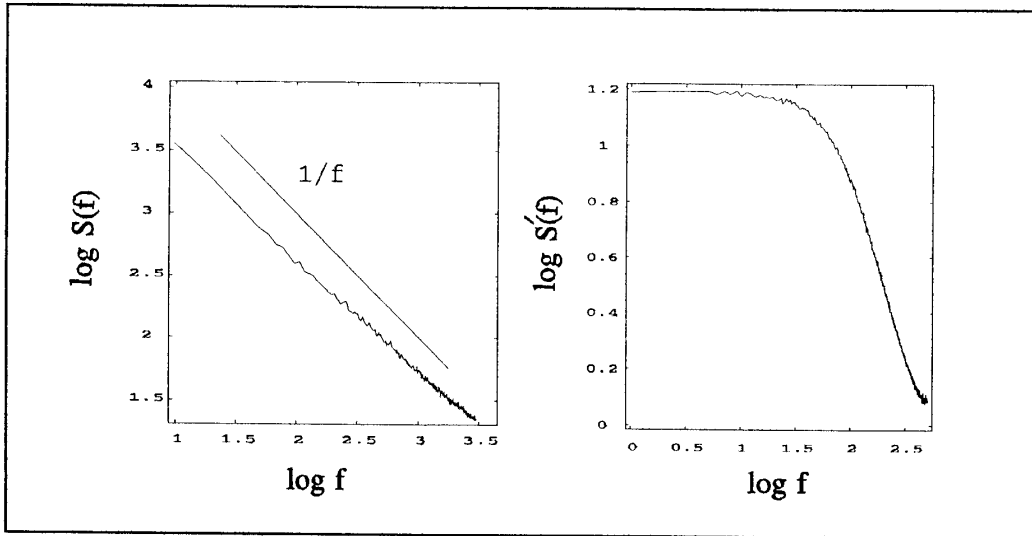
## 5.b Kísérleti modellek

Az első áramkörben egy FET tranzisztor  $\mu\text{V}$ -os nagyságrendű (gaussi)  $1/f$  zaját erősítjük fel [4,10] (14. ábra )



14. ábra MOSFET zajforrással felépített  $1/f$  zajgenerátor.

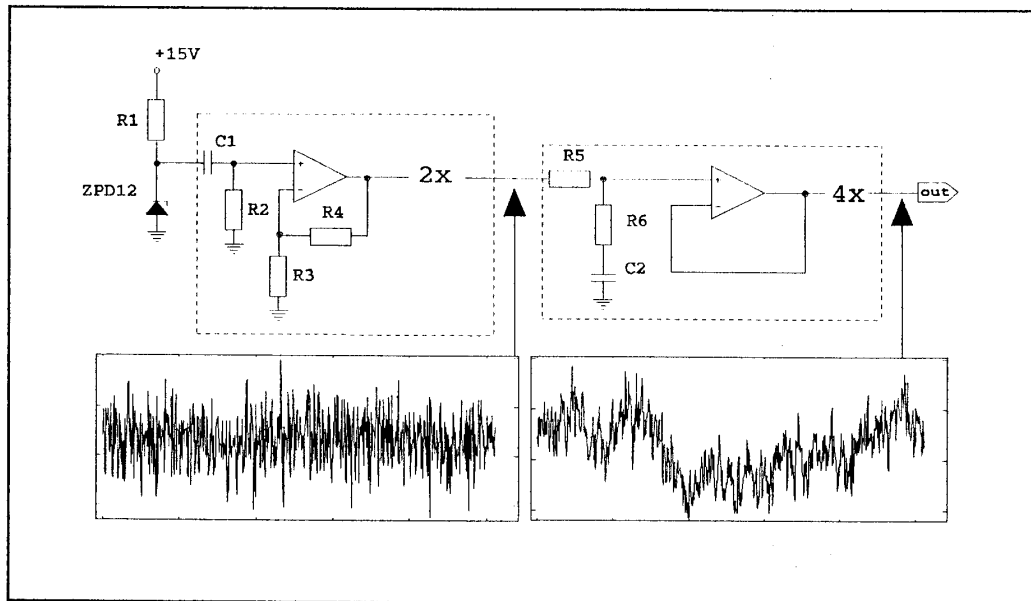
Mintavételezés előtt a kapott jelet  $f_n=3\text{KHz}$  határfrekvenciájú aluláteresztő szűrővel vágjuk. A mintavételezést  $f_{mv}=10\text{KHz}$  frekvenciával végezzük. A korrelációs együttható  $\rho=0,5$ -nek adódik. Az  $f \leq 3000\text{Hz}$  tartományon  $1/f^{0.88}$  meredekségű spektrumot kapunk. Az eredeti és az átmenetmátrixból visszagenerált folyamat spektruma a 15. ábrán látható.



15. ábra A MOSFET tranzisztoros áramkör zajának spektruma, és a visszagenerált zajfolyamat spektruma.

Tehát kísérleti  $1/f$  zajból sem kapunk Markov-folyamatot.

A másik folyamat előállításánál felhasználtuk Marvin Keschner módszerét, azaz fehérzaj szűrésével kapunk  $1/f$  folyamatot [3]. Az elektromos áramkör két részből áll. Az első egy Zener diódát alkalmazó zajforrás, melyben a Z dióda a letörési pont közelében működik [11]. Az áramkört az 16. ábra bal oldalán láthatjuk.



16. ábra Zener-diódával felépített zajforrás és a szűrő áramköre. Az egyes egységek által szolgáltatott zajfolyamatot alul láthatjuk.

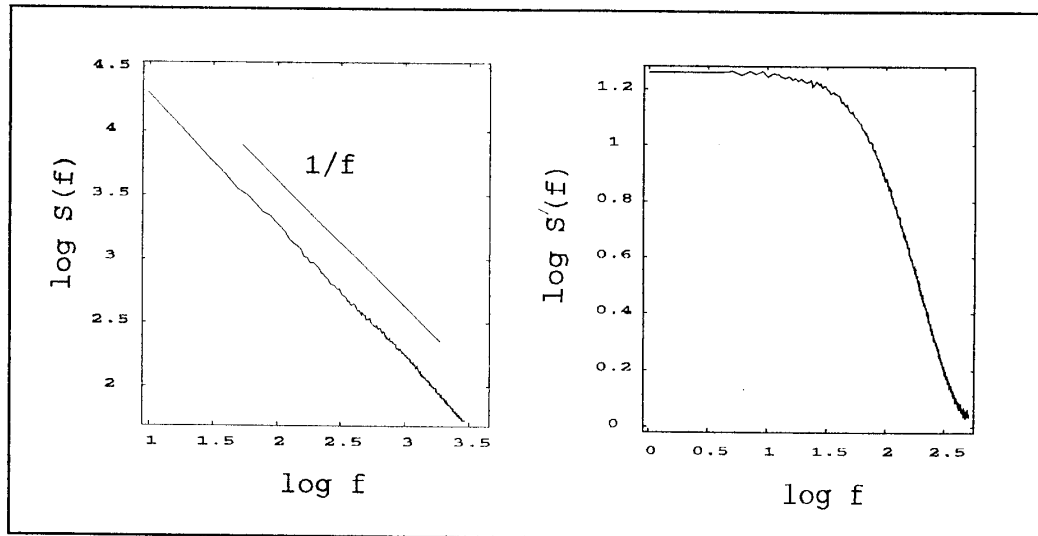
Az áramkör kimenetén Gauss-eloszlású fehér zajt kapunk. Ezt a fehér zajt egy szűrőlánc segítségével  $1/f$  zajjává szűrjük. Ez a következő elven működik. Egy  $A(f)$  átviteli függvényű áramkör a bemenetére adott  $S_x(f)$  spektrumú,  $X(t)$  időfüggvényű jelet egy  $Y(t)$  időfüggvényű

$$S_y(f) = |A(f)|^2 S_x(f) \quad (14)$$

spektrumú jelbe viszi át [12]. Az  $S_x(f) = \text{konst.}$ , mivel a bemenő jel fehér zaj. Emiatt, ha  $|A(f)|^2 \sim 1/f$ , az áramkör kimenetén  $1/f$  zajt kapunk. Az  $|A(f)|^2 \sim 1/f$  átvitelt proporcionális szűrőkkel biztosítjuk 4 frekvenciadekád felett (16. ábra jobb oldalán). A mintavétel ismét  $f_{mv} = 10\text{KHz}$  frekvenciával történt, a korrelációs együttható  $\rho = 0,6$ . Az eredeti és az átmenetmátrixból visszagenerált folyamat spektruma a 17. ábrán látható. Az eredeti



1/f folyamat ebben az esetben sem markovi.



17. ábra A Zener-diódával felépített áramkör zajának spektruma, és a visszagenerált zajfolyamat spektruma.

## 6. Az eredmények összefoglalása

Az eredmények általánossága érdekében a vizsgálatokat négy különböző eredetű gaussi 1/f zajra is elvégeztük. Eredményként lorentzi spektrumokat kaptunk. Ezek tehát nem elsőrendű Markov-folyamatok. Az elsőrendű átmeneti valószínűség ismerete nem elegendő az 1/f zaj egy  $U'_{n+1}=T(U'_n)$  jellegű iterációs modelljéhez. Tehát ezeket a folyamatokat a teljesítménysűrűség-spektrumuk mellett az elsőrendű és másodrendű sűrűségfüggvényeik nem jellemzik olyan mértékben, hogy egy ezen függvényeknek megfelelő időbeli zajfolyamat előállítható lenne. A módszerként adott algoritmus egy  $\rho$  korrelációjú 1/f folyamatból annyi információt tart meg, amennyi a visszagenerált zaj markovi tulajdonságának megfelel. A végzett kísérletek és kapott eredmények általánosságát a Gauss-eloszlás gyakori előfordulása, valamint a vizsgálat különböző eredetű 1/f zajokra való elvégzése támasztja alá.

## Irodalomjegyzék

- [1] R.F. Voss: Proc. 33rd Annual Symp. on Freq control, Atlantic City, 1979.
- [2] F.N. Hooge: 1/f noise Physica 83B (1976) 14-23
- [3] Marvin S Keshner: 1/f noise Proc. of the IEEE, Vol. 70, No. 3, March 1982.
- [4] Dr. Ambrózy András: Elektronikus zajok Műszaki K., Bp. 1972.
- [5] Nelson Max: Noise and stochastic processes Dover Publications, New York 1954.
- [6] Prékopa András: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal Műszaki K., Bp. 1980.
- [7] Fazlollah M. Reza: Bevezetés az információelméletbe Műszaki K., Bp. 1966.
- [8] Deák Ferenc: Véletlenszám-generátorok és alkalmazásuk Akadémiai K., Bp. 1986.
- [9] S. Karlin, H. M. Taylor: Sztochasztikus folyamatok Gondolat K., Bp. 1985.
- [10] Motchenbacher-Fitchen: Kis-zajú elektronikus áramkörök tervezése Műszaki K., Bp. 1977.
- [11] J. Belan, F. Matiscak, V. Mikolaj, F. Strapko, V. Latta: Dependence of voltage on the ratio of the avalanche and tunneling in reference diodes Proc. Noise in Physical Systems, 263, Akadémiai K., Bp. 1990.

- [12] Dr. Schnell László: Jelek és rendszerek mérés technikája  
Műszaki K., Bp. 1985.
- [13] Norbert Hesselmann: Digitális jelfeldolgozás  
Műszaki K., Bp. 1985.