

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

KÍSÉRLETI FIZIKAI TANSZÉK

1/f^K-zajjal gerjesztett bistabil rendszerek

diplomamunka

Készítette: Makra Péter

Témavezető: Dr Gingl Zoltán

SZEGED, 2001

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS	2
2. ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS	4
2.1. Valószínűség-számítási alapfogalmak	4
2.2. Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságainak leírása	7
2.3. Véletlen folyamatok frekvenciatartománybeli leírása	9
2.4. A zajok osztályozása eloszlásuk és spektrumuk szerint	10
2.5. A mintavételi tétel; szűrés	12
2.6. A jel/zaj-viszony és a sztochasztikus rezonancia	17
3. $1/F^k$-TÍPUSÚ ZAJJAL GERJESZTETT BISTABIL RENDSZEREK MODELLEZÉSE	20
3.1. A bistabil rendszer leírása	20
3.2. A numerikus modellezés stratégiája; szoftverkörnyezet	23
3.3. A differenciálegyenlet numerikus megoldása	24
3.4. Az időfüggő rész előállítás; az $1/f^k$ -zaj spektrális tulajdonságainak és szórásának beállítása	27
3.5. A kimenő jel	32
3.6. A teljesítménysűrűség-spektrumok számítása, a spektrumok átlagolása	33
3.7. A jel/zaj-viszony számítása	34
3.8. A numerikus szimuláció paraméterei	36
4. EREDMÉNYEK	38
5. ÖSSZEFOGLALÁS	43
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	44
IRODALOMJEGYZÉK	45

1. Bevezetés

A fizikai rendszerek vizsgálatánál szükségszerűen fellépnek bizonyos véletlen jelenségek, zajok. Véletlenszerű jelenségeknek tekintjük azon folyamatokat, melyeknek jövőbeli viselkedését nem tudjuk egyértelműen megjósolni. A véletlenszerűség magyarázatára alapvetően kétféle megközelítés terjedt el: a hagyományos értelmezés szerint nem valódi véletlenszerűségről van szó, csupán a rendszer működésének leírását lehetetlenné teszi a rendszert jellemző egyenletek megoldhatatlansága vagy a szükséges ismeretek hiánya; míg a XX. század elejétől elterjedt az az elképzelés, mely szerint bizonyos folyamatok viselkedését nem ok-okozati összefüggések határozzák meg, azaz a véletlenszerű jelenségek egy részének hátterében nem is létezik törvényszerűség vagy kiváltó ok. Az előbbi felfogás szellemét jellemzi Laplace egyik állítása, mely szerint a megfelelő egyenletek és kezdeti feltételek birtokában elvileg minden előre kiszámítható, mivel minden eseménynek létezik kiváltó oka, és létezik az okozat létrejöttének törvényszerűsége is [1]. Az utóbbi szemlélet a kvantummechanika terjedésével kezdett tért hódítani; a vele szemben támasztott ellenérzéseket érzékelteti Einstein, Podolsky és Rosen 'Can Quantum-Mechanical Description of Reality Be Considered Complete?' című cikke [2], melyben a szerzők mellett érvelnek, hogy a kvantummechanika mögött is kell lennie egy teljes, determinisztikus elméletnek. Az ezzel kapcsolatos vitát John S Bell döntötte el [3]; az általa felállított egyenlőtlenség kísérleti vizsgálata nyomán igazolást nyert, hogy ilyen determinisztikus elmélet nem létezik. Ezzel a mérleg a nem-kauzális elképzelés javára billent.

E véletlenszerű jelenségek a megfigyelő számára legtöbbször mint zajok jelennek meg. A zajokat általában káros, zavaró tényezőknek tekintjük, melyek a mérések hibáját növelik; ennél fogva igyekszünk tőlük megszabadulni, vagy legalábbis minimálisra csökkenteni a hatásukat. Kezdetben ez a törekvés indokolta a zajok behatóbb tanulmányozását. Később felismerték, hogy a zaj is a vizsgált rendszer sajátja, így elemzésével magáról a rendszerről nyerhetünk információt. Az

információszerzés ezen válfaja különösen akkor kerül előtérbe, amikor nincs lehetőség arra, hogy a vizsgált rendszert a mérés érdekében gerjesszük, mert ekkor beavatkoznánk a rendszer működésébe, vagy magát a rendszert is megváltoztatnánk. Példaként az atomreaktorokban zajló folyamatok fluktuációinak neutrondetektorokkal történő megfigyelését, vagy az integrált áramkörök megbízhatóságának vizsgálatát említhetjük.

A zajok kutatásának viszonylag új részterülete a *sztochasztikus rezonancia* vizsgálata. Sztochasztikus rezonancia alatt azt a jelenséget értjük, amelynek során bizonyos rendszerekben a jelátvitel zaj hozzáadásával javítható. Ez pontosabban azt jelenti, hogy a jelátvitel jóságát jellemző *jel/zaj-viszony* a rendszerbe adott zaj nagyságának függvényében maximumot mutat, azaz az optimális jelátvitel nem zaj nélkül következik be (ahogy ezt első látásra várnánk), hanem adott mennyiségű zaj jelenléte esetén.

A sztochasztikus rezonanciát a legtöbb esetben fehérzaj esetére vizsgálták, az utóbbi időben azonban egyre nagyobb érdeklődés kíséri az úgynevezett *színes zajokkal* történő gerjesztéseket. Nozaki és Yamamoto például a FitzHugh-Nagumo-féle neuronmodellben hasonlították össze a fehérzaj és különböző színes zajok hatását [4], és azt tapasztalták, hogy színes zajok esetén kisebb zajszórás is elegendő volt a rezonancia eléréséhez. Mi a fehérzaj és a színes zajok összehasonlítását egy kettős potenciálvölgyben mozgó részecske, az úgynevezett *bistabil rendszer* numerikus modellezésével tanulmányoztuk; az általunk alkalmazott színes zajok az eddigieknél lényegesen szélesebb skálán mozoghattak.

E dolgozat célja tehát az, hogy bemutassa a bistabil rendszerben fellépő sztochasztikus rezonancia jellemző paramétereinek (úgy mint a rezonanciához szükséges zajszórás, illetve a rezonanciaesetben tapasztalható jel/zaj-viszony) a rendszerhez adott zaj típusától való függését. Ehhez először tisztázzuk a sztochasztikus rezonancia leírásához szükséges alapvető fogalmakat, majd kitérünk a modellezés részleteire, végül bemutatjuk a modellezés során kapott eredményeket.

2. Elméleti áttekintés

2.1. Valószínűségszámítási alapfogalmak

A véletlen folyamatok leírásánál a fizikai mennyiségeknek *valószínűségi változók* felelnek meg. Tekintsük most röviden át ezen valószínűségi változók bevezetéséhez szükséges fogalmakat, a valószínűségi változók tulajdonságait, a velük kapcsolatos néhány numerikus jellemzőt.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi eseményeknek* nevezzük (jelük: ω). Az összes lehetséges elemi esemény halmaza az *eseménytér*, jele: Ω ($\Omega = \{\omega_i\}$). Az eseménytérre itt nem részletezett algebrai struktúrát illesztve a *Kolmogorov-féle valószínűségi mező*höz jutunk. A valószínűségi mezőn *eseménynek* nevezzük az eseménytér egy részhalmazát. Az esemény *valószínűségét* P -vel jelöljük, argumentumában az esemény szerepel.

Valószínűségi változó az a $\xi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ leképezés, amely mérhető a valószínűségi mezőn (mértékelméleti értelemben véve). Értékkészletük alapján diszkrét és folytonos valószínűségi változókat különböztetünk meg.

Diszkrétnek nevezzük azt a valószínűségi változót, amelynek az értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen. A diszkrét valószínűségi változót legpontosabban úgy tudjuk jellemezni, hogy megadjuk lehetséges értékeit és azt, hogy ezeket az értékeket milyen valószínűséggel veszi fel, azaz az \mathbf{x}_k értékeket és a $\mathbf{p}_k = P(\{\omega: \xi(\omega) = \mathbf{x}_k\})$ valószínűségeket ($\{\omega: \xi(\omega) = \mathbf{x}_k\}$ azt az eseményt jelenti, hogy a ξ valószínűségi változó az \mathbf{x}_k értéket veszi fel). A \mathbf{p}_k valószínűségekre igaz a következő összefüggés:

$$\sum_k p_k = 1 \tag{2.1}$$

ha a \mathbf{k} index végigfutja ξ teljes értékkészletét. A valószínűségi változóról maximális információt hordoz az $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ *eloszlásfüggvény*:

$$F(x) := P(\{\omega : \xi(\omega) < x\}). \quad (2.2)$$

Az eloszlásfüggvény megadja, hogy egy valószínűségi változó milyen valószínűséggel marad egy adott korlát (x) alatt; segítségével azt is kiszámíthatjuk, hogy egy ξ valószínűségi változó értéke milyen valószínűséggel esik egy tetszőleges $[a, b]$ intervallumba:

$$\begin{aligned} P(\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}) &= P(\{\omega : \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) < a\}) = \\ &= P(\{\omega : \xi(\omega) < b\}) - P(\{\omega : \xi(\omega) < a\}) = F(b) - F(a) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ahol a \setminus jel a halmazok közti különbségképzést jelöli.

A valószínűségi változóról kevésbé pontos információt szolgáltat a *várható érték*, melynek definíciója diszkrét esetben:

$$E(\xi) := \sum_k p_k \cdot x_k. \quad (2.4)$$

Folytonos valószínűségi változóról beszélünk abban az esetben, ha létezik olyan f : \rightarrow függvény, amelyre teljesül, hogy

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad (2.5)$$

ahol $F(x)$ az eloszlásfüggvény. Az f függvényt a valószínűségi változó *sűrűségfüggvényének* nevezzük. A sűrűségfüggvény segítségével is megadható, mekkora valószínűséggel esik egy ξ valószínűségi változó értéke egy $[a, b]$ intervallumba:

$$P(\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.6)$$

Folytonos valószínűségi változóra is megadható a várható érték:

$$E(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (2.7)$$

feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ konvergens.

A várható érték megadja azt a szintet, amely körül a mért értékek ingadoznak, nem ad azonban számot magáról az ingadozás nagyságáról. Erre vezetjük be a *szórást*, melynek definíciója mind diszkrét, mind folytonos valószínűségi változóra:

$$D(\xi) := \sqrt{E([\xi - E(\xi)]^2)}, \quad (2.8)$$

azaz a várható értéktől való eltérés négyzetének várható értékéből vont négyzetgyök.

A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókat (teljesen) *függetleneknek* nevezzük, ha

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\omega : \xi_i(\omega) < x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(\{\omega : \xi_i(\omega) < x_i\}), \quad (2.9)$$

azaz annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a valószínűségi változók egyidőben a rájuk jellemző korlát alatt maradnak, megegyezik az egyedi valószínűségek (az adott változó az adott korlát alatt marad) szorzatával.

Ha több valószínűségi változónk van, ezek összegének várható értékére igaz a következő összefüggés:

$$E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n E(\xi_i). \quad (2.10)$$

Ha a valószínűségi változóink függetlenek, összegük szórásnégyzete a következőképpen viselkedik:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n D^2(\xi_i). \quad (2.11)$$

A fizikai mérések során fellépő véletlen jelenségekben az elemi események az egyes mérések, a valószínűségi változó az ingadozó fizikai mennyiség. A várható érték a fizikai mennyiség átlagértékét, a szórás az ingadozást adja meg. Ha a mérés például digitális úton történik,

kézenfekvőnek tűnik, hogy a fizikai mennyiséget diszkrét valószínűségi változónak tekintsük, de mivel a mérőműszerek pontatlansága határt szab a mérési adatok értékeinek, szükség van a folytonos eset kezelésére is.

2.2. Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságainak leírása

Fizikai mérések során a véletlen folyamatok tulajdonságai változhatnak az időben. Ezért szükséges, hogy a továbbiakban a valószínűségi változókat időfüggőeknek tekintsük. Az eddig bevezetett mennyiségekben az idő mint új paraméter jelenik meg, például a sűrűségfüggvény alakja $f(\mathbf{x}, t)$ lesz. Az idő bevezetése új mennyiségek definiálását teszi lehetővé. Képezhetjük például az *időbeli középértéket*, amelyet egy véletlenszerűen ingadozó feszültségnek megfelelő $U(t)$ valószínűségi változó esetében mérésrel úgy kaphatunk meg, hogy a mérés T idejére képezzük az $U(t)$ jel átlagértékét:

$$\langle U(t) \rangle_T := \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T U(t) dt . \quad (2.12)$$

$T \rightarrow \infty$ határátmenetben kapjuk az $\langle U(t) \rangle$ időátlagot:

$$\langle U(t) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T U(t) dt . \quad (2.13)$$

Ha az $E(U)$ várható érték időfüggetlen, akkor általában az időátlag nem egyezik meg a várható értékkel. Ahhoz, hogy az időbeli és a sokaságra vonatkozó átlagok megegyezzenek, a statisztikai jellemzőknek időfüggetlennek kell lenniük. Azon folyamatokat, melyekre ez a feltétel teljesül, *stacionáriusnak* nevezzük. A stacionaritás önmagában szükséges, de nem elégséges feltétele a kétféle átlagérték egyezésének. Létezik a stacionárius folyamatoknak egy olyan osztálya, amelyre már teljesül a kétféle átlag ekvivalenciája; ezeket a folyamatokat *ergodikusnak* nevezzük.

A továbbiakban bevezetünk néhány mennyiséget, amelyek a sztochasztikus folyamatok időbeli tulajdonságait írják le. Elsőként az $\mathbf{x}(t)$ sztochasztikus jel (időfüggő valószínűségi változó) *autokorreláció-függvényét* definiáljuk:

$$R_{xx}(t, t + \tau) := E(x(t) \cdot x(t + \tau)). \quad (2.14)$$

Az autokorreláció-függvény azt jellemzi, hogy a jel τ idejű eltolás esetén mennyire „hasonlít” önmagára. Ha egy jel esetén a $t+\tau$ idejű értékek függetlenek attól, hogy a jel milyen értéket vett fel a t időpillanatban, akkor a kérdéses folyamat korrelálatlan. Ekkor az autokorreláció-függvény minden $0 \neq \tau$ -ra nullával egyenlő, a $\tau=0$ esetben pedig a jel várható értékének négyzetét adja.

Ergodikus jelekre az autokorreláció-függvényt a következő módon is megadhatjuk:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt. \quad (2.15)$$

Ugyanígy vezetjük be a *keresztkorreláció-függvényt*, amely két jel közötti kapcsolatot jellemez:

$$R_{xy}(t, t + \tau) := E(x(t) \cdot y(t + \tau)), \quad (2.16)$$

illetve ergodikus jelekre:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt. \quad (2.17)$$

A keresztkorreláció igen hasznos eszköz arra, hogy leírjuk két sztochasztikus folyamat kapcsolatát; sok gyakorlati mérés technikai alkalmazása van. Segítségével megadható például, hogy két sztochasztikus folyamat függ-e egymástól, és ha igen, akkor az egyik folyamat másikkra való hatása milyen időeltolódással jelentkezik.

2.3. Véletlen folyamatok frekvenciatartománybeli leírása

Sokszor van szükség arra, hogy a sztochasztikus folyamatokat ne csak idő-, hanem frekvenciatartományban is jellemezni tudjuk (például a lineáris differenciálegyenletekkel modellezhető rendszerek, valamint a periodikus összetevőket is tartalmazó folyamatok esetén). A zajok egyik lehetséges osztályozása is a spektrális tulajdonságok alapján történik. Erre a célra az úgynevezett *teljesítménysűrűség-spektrumot* használjuk, amely definíció szerint a (2.14)-ben definiált autokorreláció-függvény Fourier-transzformáltja:

$$S_{xx}(f) := \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i2\pi f \tau} d\tau, \quad f \in (-\infty, \infty), \quad (2.18)$$

illetve inverz transzformációval:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) \cdot e^{i2\pi f \tau} df. \quad (2.19)$$

A teljesítménysűrűség-spektrumot általában csak stacionárius jelekre szokás definiálni, mivel különben az időfüggés miatt matematikai nehézségek lépnének fel. Ezért használtuk a definícióban az autokorreláció-függvény (2.15)-ben megadott, ergodikus rendszerekre érvényes alakját.

Itt jegyezzük meg, hogy a (2.18)-ban definiált mennyiség negatív frekvenciákra is értelmezett, ez az úgynevezett *kétoldalas teljesítménysűrűség-spektrum*. Fizikailag értelmesebb képet ad, ha csak nem-negatív frekvenciákat engedünk meg, ekkor kapjuk az *egyoldalas teljesítménysűrűség-spektrumot*, amely értelemszerűen a kétoldalas teljesítménysűrűség-spektrum kétszerese:

$$S(f) = 2 \cdot S_{xx}(f), \quad f \in [0, \infty). \quad (2.20)$$

A teljesítménysűrűség-spektrum, nevéhez híven, a spektrális teljesítménysűrűséget adja meg, azaz segítségével megadható a jel tetszőleges $[f_1, f_2]$ frekvenciatartományba eső összetevői által hordozott teljesítmény:

$$P_{[f_1, f_2]} = \int_{f_1}^{f_2} S(f) df . \quad (2.21)$$

Természetesen a jel összteljesítményét is kiszámíthatjuk, ez jól megvilágítja az egyoldalas és a kétoldalas teljesítménysűrűség-spektrum közötti különbséget:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = \int_0^{\infty} S(f) df . \quad (2.22)$$

A teljesítménysűrűség-spektrumot megkaphatjuk a jel úgynevezett *amplitúdó-spektrumából* is, melynek definíciója:

$$F_x(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-i2\pi \cdot f \cdot t} dt . \quad (2.23)$$

A Wiener-Hincsin-összefüggések szerint:

$$S_{xx}(f) = F_x(f) \cdot \overline{F_x(f)} = |F_x(f)|^2 , \quad (2.24)$$

ahol a felülvonás a komplex konjugálást jelöli. Ebből az következik, hogy az autokorreláció-függvény ismerete nélkül is kiszámítható a teljesítménysűrűség-spektrum.

2.4. A zajok osztályozása eloszlásuk és spektrumuk szerint

Bár a zajokat mint véletlen jelenségeket értelmeztük, mégis léteznek olyan szabályszerűségek, amelyek alapján zajtípusokat különíthetünk el. Ezek közül itt az eloszlás- és a spektrum szerinti osztályozásra térünk ki.

A két leggyakoribb eloszlás szerinti zajtípus az egyenletes eloszlású, illetve a normáloszlású (más néven Gauss-eloszlású) zaj. Egy ξ zajt (mint valószínűségi változót) *egyenletes eloszlásúnak* nevezünk az **(a, b)** intervallumon, ha sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \quad (2.25)$$

Egyenletes eloszlású zaj esetén annak valószínűsége, hogy a zaj amplitúdója az **(a, b)** intervallumon belül egy adott részintervallumba esik, nem függ a részintervallum elhelyezkedésétől, csupán annak szélességétől függ. A ξ zaj akkor minősül *normáloszlásúnak*, ha sűrűségfüggvénye az alábbi alakba írható:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.26)$$

ahol μ és σ rögzített paraméterek; belátható, hogy μ éppen a zaj várható értékét, σ pedig a szórását adja. A normáloszlás igen széles körben előforduló, általános eloszlás: ilyen eloszlást mutatnak például egy populációban a testmagasság, a testsúly, illetve a vérnyomás értékei. Az úgynevezett *centrális határeloszlás-tétel* értelmében sok független valószínűségi változót összeadva az összeg sűrűségfüggvénye a normáloszláshoz tart.

Az eloszlás szerinti osztályozásnál sok esetben fontosabb a spektrum alapján történő felosztás. Gyakran a teljesítménysűrűség-spektrum frekvenciafüggése az alábbi mintát követi:

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\kappa}, \quad 0 \leq \kappa \leq 2. \quad (2.27)$$

A $\kappa=0$ esetben a teljesítménysűrűség-spektrum független a frekvenciától; ezt a zajtípust a fehér fény mintájára (amely a látható színek minden frekvenciáját közel egyenlő arányban tartalmazza) *fehérzajnak* szokás nevezni. A $\kappa \neq 0$ esetben előálló zajtípusokat analóg módon *színes zajoknak* is nevezik, így a (2.27)-ben definiált κ paramétert a zaj „színeként” is értelmezhetjük. Ha $\kappa=1$ (tágabb értelemben, ha $0,8 < \kappa < 1,2$), *1/f-zajról* beszélünk. Az 1/f-zaj igen széles körben fordul elő: megtaláljuk egyes anyagok vezetőképességének fluktuációjában, lézerekben, idegsejtek működésében, folyók vízszintjének ingadozásaiban. Az előzőekhez hasonlóan értelmezzük az $1/f^{1.5}$ -zajt ($\kappa=1,5$), illetve az $1/f^2$ -zajt ($\kappa=2$) is; az előbbire a *diffúziós zaj*, míg az utóbbira a *Brown-mozgás* szolgáltat fizikai példát. Természetesen ez az osztályozás folytonosan kiterjeszthető κ tetszőleges értékeire.

A fentiekén kívül az úgynevezett lorentzi zajok is említést érdemelnek. Ezek teljesítménysűrűség-spektrumának frekvenciafüggése a következő alakban áll elő:

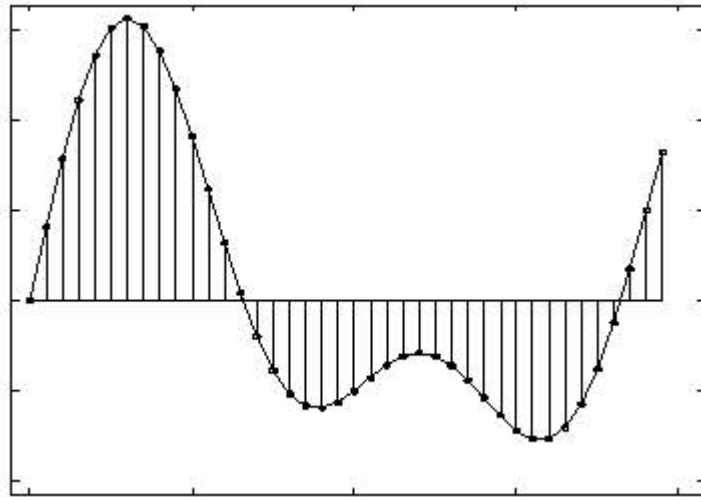
$$S(f) \propto \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}, \quad (2.28)$$

ahol f_0 egy állandó frekvencia. Vegyük észre, hogy az $1/f^2$ -zaj a lorentzi zaj határesetének tekinthető az $f \gg f_0$ feltétellel.

2.5. A mintavételi tétel; szűrés

Akár analóg jeleket akarunk számítógéppel mintavételezni, akár numerikus szimulációt alkalmazunk, a folytonosnak feltételezett jel helyett egy diszkrét pontsorozattal kell dolgoznunk, azaz a jelet amplitúdóban és időben is kvantálnunk kell, ahogy azt a 2.1. ábra is szemlélteti.

Az amplitúdóbeli kvantálás természetesen bizonyos mértékben torzítja a jelet, de a pontosság a legtöbb esetben kielégítő, sőt, általában meghaladja az analóg mérési módszerek pontosságát. Ennélfogva a jel amplitúdóbeli kvantálása legtöbbször nem okoz számottevő hibát.



2.1. ábra: Mintavételezés (a vízszintes tengelyen az időt, a függőlegesen az amplitúdót tüntettük fel)

Az időbeli kvantáltság egészen más jellegű probléma. Ekkor az $\mathbf{x}(t)$ jelnek csak bizonyos t_i időpillanatbeli értékeit ismerjük. Ha lehetséges, akkor célszerű a mintavételi időpontokat egymástól egyenlő távolságra megválasztani; ez esetben *periodikus mintavételezésről* beszélünk. A továbbiakban végig periodikus mintavételezést tételezünk fel.

A mintavételi időköz megválasztásakor nagy körültekintéssel kell eljárunk, nem minden esetben lehet ugyanis a jelet információvesztés nélkül mintavételezni. Erre vonatkozik az információelmélet egyik igen fontos tétele, a mintavételi tétel:

Tétel: Ha az $\mathbf{x}(t)$ jel Fourier-felbontásában az f_0 -nál nagyobb frekvenciájú komponensek amplitúdója nulla, akkor a jelet teljes mértékben meghatározzák $\Delta t := 1/(2f_0)$ időközönkénti mintái az alábbiak szerint:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ x(k\Delta t) \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{t - k\Delta t}{\Delta t}\right)}{\pi \cdot (t - k\Delta t)} \right\}. \quad (2.29)$$

Bizonyítás: jelölje $\mathbf{X(f)}$ az $\mathbf{x(t)}$ jel Fourier-transzformáltját. Az inverz Fourier-transzformációt használva:

$$x(t) = \int_{-f_0}^{f_0} X(f) e^{i2\pi \cdot f \cdot t} df, \quad (2.30)$$

ahol kihasználtuk, hogy az $\mathbf{f_0}$ -nál nagyobb frekvenciájú komponensek amplitúdója nulla. E feltétel értelmében a transzformált a $[-\mathbf{f_0}, \mathbf{f_0}]$ intervallumra korlátozódik, tehát létezik a következő Fourier-sora:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{-i2\pi \cdot \frac{kf}{2f_0}}, \quad (2.31)$$

ahol

$$C_k = \frac{1}{2f_0} \cdot \int_{-f_0}^{f_0} X(f) \cdot e^{i2\pi \cdot \frac{kf}{2f_0}} df. \quad (2.32)$$

Felismerve a (2.30) és (2.32) közötti hasonlóságot, $\mathbf{C_k}$ -t az alábbi alakba is írhatjuk:

$$C_k = \Delta t \cdot x(k\Delta t). \quad (2.33)$$

Ezt visszairjuk a (2.31) kifejezésbe:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot x(k\Delta t) \cdot e^{-i2\pi \cdot f \cdot k\Delta t}. \quad (2.34)$$

A (2.34) kifejezés segítségével a jel a következő alakba írható:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-f_0}^{f_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot x(k\Delta t) \cdot e^{-i2\pi \cdot f \cdot k\Delta t} \right) \cdot e^{i2\pi \cdot f \cdot t} df = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\Delta t \cdot x(k\Delta t) \cdot \int_{-f_0}^{f_0} e^{i2\pi \cdot f \cdot (t-k\Delta t)} df \right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Az integrálást elvégezve:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot x(k\Delta t) \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot f_0 \cdot (t - k\Delta t))}{\pi \cdot (t - k\Delta t)} \tag{2.36}$$

ami a $\Delta t = 1/(2f_0)$ összefüggés figyelembevételével éppen a tételben foglalt állítás. **QED**

A tétel más megfogalmazásban azt jelenti, hogy ha a mintavételi frekvenciánk $2f_0$, akkor egészen addig nem történik a mintavételezés során információveszteség, amíg csak olyan jeleket vizsgálunk, melyekben csak f_0 -nál kisebb frekvenciájú összetevők fordulnak elő.

Nézzük meg most azt, hogy mi történik, ha nem teljesül a mintavételi tételben foglalt feltétel, azaz a mintavételezett jel f_0 -nál nagyobb frekvenciájú összetevőket is tartalmaz. Vegyünk például egy

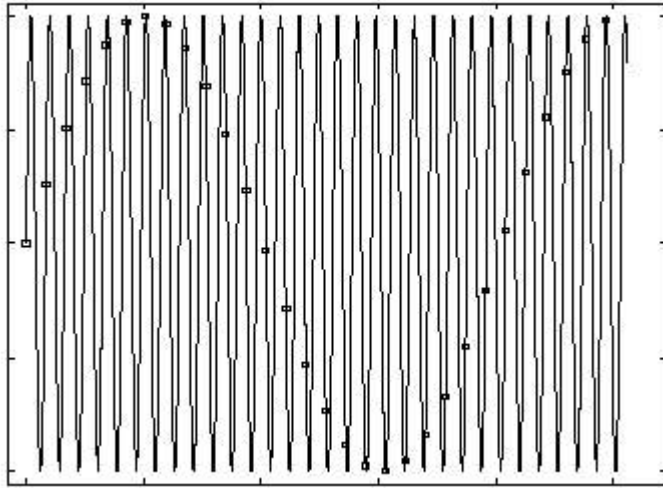
$$f = k \cdot f_0 + F \tag{2.37}$$

frekvenciájú szinuszjelet, ahol $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Ekkor az $x(t) = \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$ jelnek a következő mintavételezett jel felel meg:

$$\begin{aligned}
x(j\Delta t) &= x\left(\frac{j}{2f_0}\right) = \sin\left(2\pi(kf_0 + F)\frac{j}{2f_0}\right) = \sin\left(\pi k j + 2\pi F \frac{j}{2f_0}\right) = \\
&= \begin{cases} -\sin\left(2\pi F \frac{j}{2f_0}\right), & \text{ha } k \cdot j \text{ páratlan} \\ \sin\left(2\pi F \frac{j}{2f_0}\right), & \text{ha } k \cdot j \text{ páros} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Látható, hogy ez semmiképpen sem adja vissza a valódi jelet: ha k páros, akkor az f frekvenciájú jelnek ugyanaz a mintavételezett jel felel meg, mint az F frekvenciájúnak; ha k páratlan, akkor a jel

mintavételezett alakja egy olyan adatsor, amelyik minden második pontban előjelet vált. (A mintavételi tétel megsértésének következményeit a 2.2. ábra szemlélteti). Tehát a mintavételi tétel értelmében csak olyan jeleket tudunk információvesztés nélkül f_s frekvenciával mintavételezni, amelyekben csak $f_s/2$ -nél kisebb frekvenciájú összetevők szerepelnek. A mintavételi tétel figyelembevétele különösen akkor fontos, amikor spektrumot szeretnénk számolni, ekkor ugyanis a tétel megsértése esetén a különböző frekvenciákhoz tartozó komponensek összeadódnak, így meghamisítják a spektrumot.



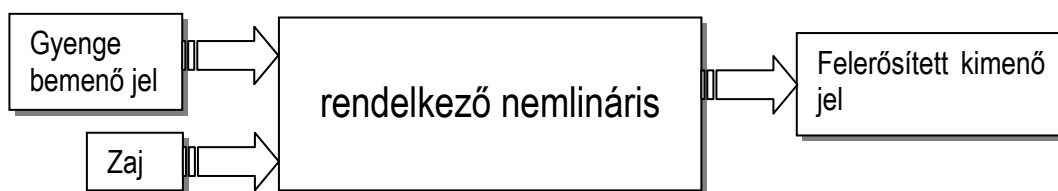
2.2. ábra: A mintavételi tétel megsértésének következményei
(vízszintesen az időt, függőlegesen az amplitúdót tüntettük fel)

Ha ismerjük a mérendő jel felső határfrekvenciáját, a fentiek értelmében ennek a határfrekvenciának a kétszeresénél nagyobb mintavételezési frekvenciát kell használnunk annak érdekében, hogy a mintavételi tétel ne sérüljön. Ha ez a felső határfrekvencia nem ismert, vagy meghaladja a mérőműszer által biztosított tartományt, szűrést kell alkalmaznunk, azaz olyan áramköri elemeket kell beiktatnunk, amelyek nem engedik át a jelből a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú összetevőket. Ez természetesen a jel torzítását jelenti, de ez a torzítás nem befolyásolja például a spektrum mérését a kisebb frekvenciákon. Ha spektrális elemzést végzünk, akkor minden esetben használnunk kell szűrőt.

A fent elmondottak arra vonatkoztak, amikor analóg jelet mintavételezünk. Numerikus szimuláció esetén a vizsgált jelünk eleve egy diszkrét pontsorozat; ekkor nem annyira kritikus a mintavételi frekvencia és a felső határfrekvencia viszonya, azonban itt is előadódhatnak olyan esetek, amikor a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú összetevők jelenléte hibát okoz, például egy négyszögjel spektrumának analízisének. Esetünkben a zaj felső határfrekvenciájának korlátozása ettől némileg eltérő okok miatt válik szükségessé, de erről majd a zaj generálásáról szóló alfejezetben ejtünk szót.

2.6. A jel/zaj-viszony és a sztochasztikus rezonancia

Ahogy a bevezetésben is utaltunk rá, sztochasztikus rezonanciáról abban az esetben beszélünk, amikor egy nemlineáris rendszer kimenő jelére jellemző *jel/zaj-viszony* a bemenetre adott zaj szórásának függvényében egy rezonancia-jellegű görbét ír le. Ez a jelenség sokféle rendszerben megfigyelhető, bizonyos félvezető eszközöktől kezdve kémiai reakciókon át egészen egyes állatfajok idegsejtjeiig. A sztochasztikus rezonanciát mutató rendszerek három alapvető sajátágukban egyeznek meg: egyrészt mindegyikükben fellelhető egyfajta küszöbszint; másrészt a bemenő determinisztikus jel mindegyik esetben gyenge (küszöbalatti); végül mindegyikben található zajforrás, amely vagy a rendszer sajátja, vagy kívülről adódik hozzá a determinisztikus jelhez [7]. A sztochasztikus rezonancia alapvető mechanizmusát az alábbi egyszerűsített sémában foglaltuk össze:



2.3. ábra: A sztochasztikus rezonancia általános sémája

Az ábrán feltüntetett zaj lehet a rendszer sajátja, illetve kívülről hozzáadott zaj is; a folyamat lényege, hogy a gyenge (általában küszöbalatti) bemenő jel hatására létrejövő kimenő jel minőségét a bemenetre adott zaj segítségével javítani lehet, illetve kimenő jelet lehet kapni abban az esetben is, amikor zaj nélkül egyáltalán jelenne meg semmiféle jel a kimeneten.

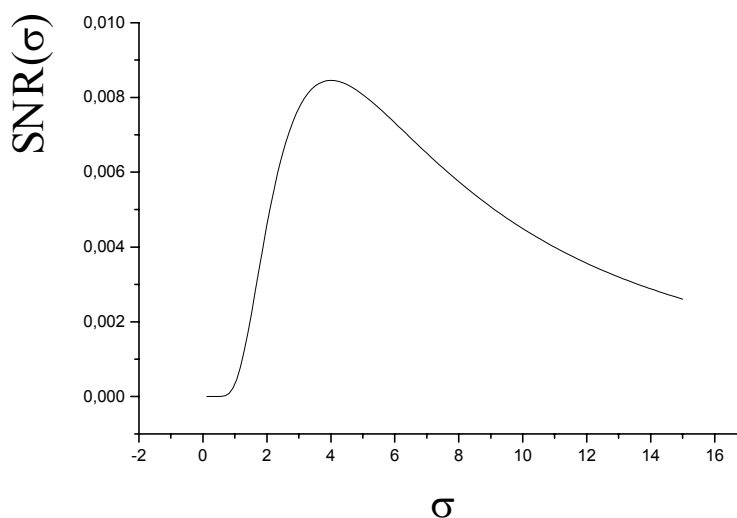
A sztochasztikus rezonancia kvantitatív jellemzéséhez bevezetünk egy újabb mennyiséget, az úgynevezett *jel/zaj-viszonyt* (angol elnevezéssel: *signal-to-noise ratio*, *SNR*). Ennek definíciója [8],[9], [10], [11], [12] és [13] nyomán a következő:

$$SNR := 2 \cdot \frac{\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{F-\Delta f}^{F+\Delta f} S(f) df}{S_N(F)}, \quad (2.39)$$

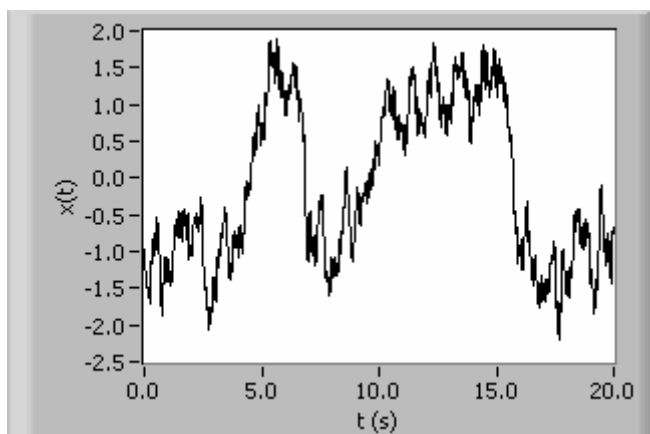
ahol F a bemenő jel frekvenciája, $S(f)$ a kimenő jel teljesítménysűrűség-spektruma, $S_N(f)$ pedig a háttérzaj teljesítménysűrűség-spektruma a kimenő jelben. Megjegyezzük, hogy számos ellenvetés merülhet fel e definícióval kapcsolatban: többek közt dimenzionálisan sem lehet helyes, hiszen teljesítményt osztunk spektrális teljesítménysűrűséggel, így az eredmény egy dimenziótlan arányszám helyett frekvencia-dimenziójú lesz. Mivel azonban az irodalomban ezt a definíciót szokták elfogadni, mi is ezt tüntettük itt fel.

Az így értelmezett jel/zaj-viszony a jel jóságát jellemzi a bemenő jel frekvenciája körüli spektrális tartományban: minél nagyobb a jel/zaj-viszony, annál nagyobb súllyal van jelen ebben a tartományban az információt hordozó determinisztikus komponens a háttérzajhoz viszonyítva. A jel/zaj-viszony segítségével pontosabban körülírhatjuk a sztochasztikus rezonancia fogalmát: akkor beszélhetünk sztochasztikus rezonanciáról, amikor a kimenő jelhez tartozó jel/zaj-viszonyt a rendszerhez adott zaj amplitúdójának (szórásának) függvényében ábrázolva rezonancia-jellegű görbét kapunk, azaz a jel/zaj-viszony a zaj szórásának függvényében nem-nulla zajszórásnál maximumot mutat (2.4. ábra).

A jelenség első látásra paradoxnak tűnhet: a hozzáadott zaj szórását növelve egészen a rezonancia eléréséig növekszik a jel/zaj-viszony, azaz egyre több zajt hozzáadva (egy határig) egyre kevésbé lesz zajos a kimenő jel. Ha azonban tekintetbe vesszük, hogy a bemenő determinisztikus jelünk küszöbalatti amplitúdóval rendelkezik, azaz önmagában nem elegendő ahhoz, hogy kimenő jelet kapjunk, rögtön érthetőbbé válik a folyamat: kissé leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a zaj megfelelő frekvenciájú és amplitúdójú komponensei hozzáadódnak a bemenő jelhez, és így együttesen már meghaladhatják a küszöböt, tehát kimenő jel megjelenését eredményezhetik. Egy ilyen, zaj hozzáadásával kapott kimenő jelet szemléltet a 2.5. ábra.



2.4. ábra: Sztochasztikus rezonancia (σ : a zajszórás, **SNR**: a jel/zaj-viszony)



2.5. ábra: A kimenő jel zaj hozzáadása esetén

3. $1/f^{\kappa}$ -típusú zajjal gerjesztett bistabil rendszerek modellezése

3.1. A bistabil rendszer leírása

Ahogy a bevezetőben is említettük, a célunk az, hogy a bistabil rendszer esetére a különböző zajtípusok alkalmazásával kapott rezonanciagörbék összehasonlítása révén megvizsgáljuk, hogyan függ a sztochasztikus rezonancia helye és maximumértéke a zaj típusától. A bistabil rendszer a sztochasztikus rezonancia vizsgálatára kiválóan alkalmas, egyszerű modell; a rezonanciát befolyásoló paraméterei jól ellenőrzés alatt tarthatók. A rendszer egy szimmetrikus kettős potenciálvölgyben mozgó részecskéből áll, amelyre az erős közegegyenlenségen kívül szinuszos gerjesztés és zaj hat. A kettős potenciálvölgy két, szimmetrikusan elhelyezkedő minimummal rendelkezik, amelyeket egy potenciálgát választ el egymástól. Esetünkben ez a potenciálgát képviseli a sztochasztikus rezonanciát mutató rendszerekre általánosan jellemző küszöbszintet. A bemenő jelünk a szinuszos gerjesztés; ennek amplitúdóját olyannak választjuk, hogy önmagában ne tudja átvinni a részecskét egyik potenciálvölgyből a másikba (ne haladja meg a küszöbszintet). Mivel a kimenő jelünk a részecske tartózkodási helye (illetve annak előjele), így önmagában a szinuszos gerjesztés nem hoz létre konstansnál különböző kimenő jelet. A zaj szórását és spektrális tulajdonságait a későbbiekben részletezett módon szabályozni tudjuk, egy adott zajtípus esetén fokozatosan növelve a zaj szórását, a jel/zaj-viszonyra egy rezonanciagörbét kapunk. Egy másik zajtípusra (az előzőtől különböző κ -értékkel jellemezhető $1/f^{\kappa}$ -típusú zajra) megismételve az eljárást egy újabb rezonanciagörbéhez jutunk; a különböző színes zajok hatása közötti különbséget az egyes rezonanciagörbék összehasonlításával tudjuk megállapítani.

A továbbiakban a bistabil rendszer jellemzőit részletezzük. Elsőként térjünk ki a szimmetrikus kettős potenciálvölgyre, amely az alábbi potenciállal írható le:

$$V(x) := -\frac{a}{2} \cdot x^2 + \frac{b}{4} \cdot x^4, \quad (3.1)$$

ahol **a** és **b** rögzített paraméterek; értéküket mi a modellezés során egységnyinek választottuk. A potenciálvölgy alakját a 3.1 ábra szemlélteti. A potenciál két minimuma $\pm x_m$ -nél van, ahol

$$x_m = \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (3.2)$$

A két völgyet potenciálgát választja el egymástól, melynek magassága

$$\Delta V = \frac{a^2}{4b}, \quad (3.3)$$

a potenciálgát teteje az origóban van. A potenciálból származó erő a potenciál negatív gradiense, azaz

$$-\frac{\partial}{\partial x} V(x) = a \cdot x - b \cdot x^3. \quad (3.4)$$

A részecskére azonban nemcsak ez a potenciálból származó erő hat, hanem egy közegellenállási erő is:

$$F_k(\dot{x}) = -\gamma \cdot \dot{x}. \quad (3.5)$$

Az egyszerűség kedvéért a közegellenállási együtthatót is egységnyinek választjuk.

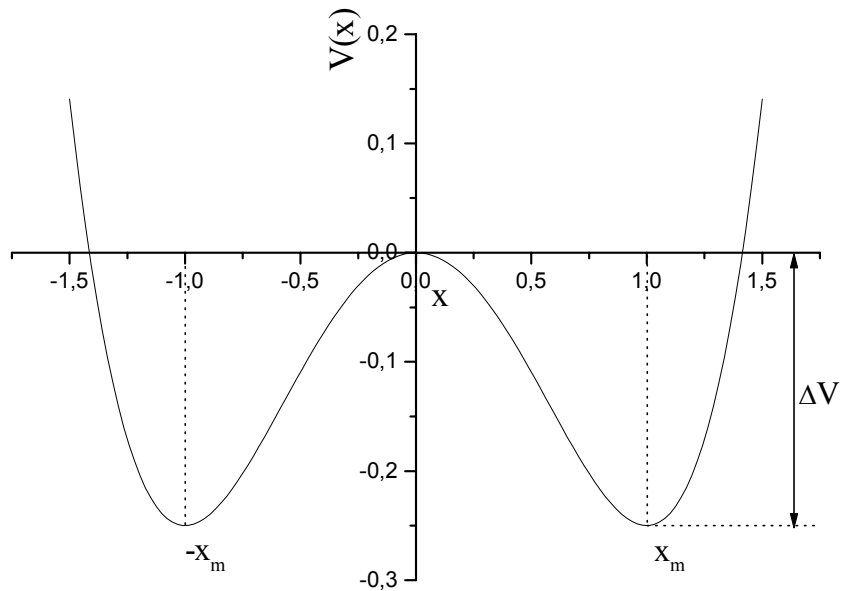
A fentiekén kívül a részecske egy **A** amplitúdójú és **F** frekvenciájú szinuszos gerjesztés hatásának is ki van téve. Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a szinuszos gerjesztés periodikusan modulálja a potenciált, azaz a $V(x, t) := V(x) - A \cdot \sin(2\pi \cdot F \cdot t)$ időfüggő potenciál völgyeinek mélysége ciklikusan változik, a megjelölt helyzetekben a zajnak lehetősége van arra, hogy a részecskét átbillentse a másik potenciálvölgybe (3.2. ábra). Ha a hangolható szórású és „színű” $\xi(\mathbf{t})$ zaj jelenlétét is figyelembe vesszük, a részecske mozgásegyenlete összességében a következőképpen írható:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x) - F_k(\dot{x}) + A \cdot \sin(2\pi \cdot F \cdot t) + \xi(t). \quad (3.6)$$

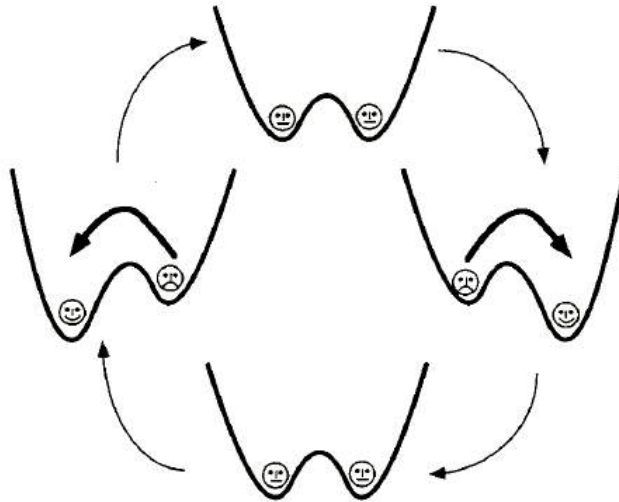
Azt mondtuk, hogy a részecske mozgását erős közegellenállás csillapítja, így amellet a gyorsulás elhanyagolható az egyenletben. A fentieket összegezve a bistabil rendszert leíró differenciálegyenlet az alábbi alakban áll elő [14]:

$$\dot{x}(t) = x - x^3 + A \cdot \sin(2\pi \cdot F \cdot t) + \xi(t). \quad (3.7)$$

Modellünk tehát lényegében a fenti (3.7) differenciálegyenlet; ennek numerikus megoldásával, illetve a megoldás spektrális elemzésével tanulmányozhatjuk a sztochasztikus rezonanciát.



3.1. ábra: A kettős potenciálvölgy



3.2. ábra: A kettős potenciálvölgy periodikus modulációja (Forrás: [7])

3.2. A numerikus modellezés stratégiája; szoftverkörnyezet

Mielőtt a modellezés lépéseit részletekbe menően megvizsgálánk, tekintsük most át, hogy milyen részfeladatokat kell a modellezés során elvégeznünk. Elsőként a bemenő jelet és a zajt (illetve, numerikus szimulációról lévén szó, az ezeknek megfelelő diszkrét adatsorokat) kell előállítanunk, adott „zajsínt” és zajszórást beállítva. Majd meg kell oldanunk a differenciálegyenletet; a megoldásból a tranzienseket eldobva, alkalmas transzformációval nyerjük a kimenő jelet. A kimenő jelnek ki kell számolnunk a teljesítménysűrűség-spektrumát, majd megfelelő számú spektrum átlagolása után jel/zaj-viszonyt kell számítanunk. A fenti eljárást növekvő zajszórásokra is megismételve, az adott spektrális eloszlású („színű”) zajra megkapjuk a jel/zaj-viszony zajszórástól való függését. A zaj spektrális eloszlását fokozatosan változtatva feltérképezzük, hogyan függenek a sztochasztikus rezonancia paraméterei a zaj típusától. Végeredményben tehát egy olyan adatállományt hozunk létre, amelynek első oszlopában az $1/f^{\kappa}$ -zaj spektrális eloszlását jellemző κ paraméter, második oszlopában a zaj szórása, a harmadikban pedig az adott κ -hoz és

zajszóráshoz tartozó jel/zaj-viszony kap helyet. Következtetéseinket ezen adatállomány elemzéséből tudjuk majd levonni.

A fenti műveletek kiterjedt számítási eszköztárat igényelnek: szükség van pszeudovéletlenszám-generátorra, gyors Fourier-transzformációra és ennek inverzére, teljesítménysűrűség-spektrumok számítására és ezek átlagolására. Célszerű tehát a numerikus modellezéshez egy olyan szoftvert választani, amelyben ezen eszközök kész rutinok formájában rendelkezésre állnak. Ezért döntöttünk a *LabVIEW 6i* mellett. Ebben a tudományos és mérnöki célokra kifejlesztett programban a fent említett részfeladatok egy-egy ikon lehelyezésével megoldhatók; sőt, ugyanebben a környezetben az eredmények akár futás közben is egyszerűen és gyorsan megjeleníthetők.

3.3. A differenciálegyenlet numerikus megoldása

Bár az időrendiség azt diktálná, hogy először a zaj és a bemenő jel előállításáról ejtsünk szót, látni fogjuk, hogy a választott differenciálegyenlet-megoldó algoritmus szabja meg a modellezés számos paraméterét, ezért célszerű elsőként azt tárgyalni.

Mi a negyedrendű Runge-Kutta-módszert választottuk a differenciálegyenlet numerikus megoldásához (az analitikus megoldás a véletlenszerű jel, azaz a zaj jelenléte miatt sem lehetséges), amely a következő alakú differenciálegyenletek megoldására alkalmas:

$$\dot{x}(t) = f(x, t). \quad (3.8)$$

Ha az eljárás lépésközét h -val jelöljük, az algoritmus az alábbi módon vázolható:

$$x_{j+1} := x_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.9)$$

$$t_{j+1} := t_j + h, \quad (3.10)$$

ahol

$$k_1 := h \cdot f(x_j, t_j); \quad (3.11)$$

$$k_2 := h \cdot f\left(x_j + \frac{k_1}{2}, t_j + \frac{h}{2}\right); \quad (3.12)$$

$$k_3 := h \cdot f\left(x_j + \frac{k_2}{2}, t_j + \frac{h}{2}\right); \quad (3.13)$$

$$k_4 := h \cdot f(x_j + k_3, t_j + h). \quad (3.14)$$

Esetünkben az f függvény a differenciálegyenlet jobboldala, amely szétválasztható egy explicite csak helytől függő és egy tisztán időfüggő részre:

$$f(x, t) := x - x^3 + A \cdot \sin(2\pi \cdot F \cdot t) + \xi(t) =: H(x) + I(t). \quad (3.15)$$

A (3.11)-(3.14) egyenletekből látható, hogy az algoritmus végrehajtása közben létrejövő, és ezért előre nem ismert k együtthatók csak a helyfüggő részt befolyásolják; az algoritmus az időfüggő részt csak az előre meghatározott h lépéssel (illetve ennek felével) lépteti. Ennélfogva megtehetjük, hogy a tisztán időfüggő tagokat (a bemenő jelet és a zajt) előre legeneráljuk, így az algoritmus végrehajtása során csak az őket reprezentáló tömbök megfelelő elemeit kell kiindexelnünk és a helyfüggő részhez hozzáadnunk.

Az algoritmus leírásából az is kitűnik, hogy az időfüggő résznek megfelelő tömböt úgy kell előállítanunk, hogy az egymást követő tömbelemek az időfüggő rész $h/2$ -vel növekvő helyeken vett értékeinek feleljenek meg, így az algoritmus számára éppen szükséges értékek a tömb kiindexelésével egyszerűen megkaphatók. Ebből persze az is következik, hogy az időfüggő részt megjelenítő tömb elemeinek száma kétszer akkora, mint a differenciálegyenlet megoldását megjelenítő tömb elemeinek száma. Ha az iterációs lépések számát (így a megoldástömb elemeinek számát is) N -nel, az időfüggő részt reprezentáló tömböt $\{I_\nu\}_{\nu=0}^{2N-1}$ -vel jelöljük (a legtöbb

programozási nyelv jelölésrendszerével összhangban a tömb kezdőindexe 0), a Runge-Kutta-eljárás ténylegesen az alábbi módon valósul meg:

$$k_1 = h \cdot [x_j - x_j^3 + I_{2j}]; \quad (3.16)$$

$$k_2 = h \cdot \left[x_j + \frac{k_1}{2} - \left(x_j + \frac{k_1}{2} \right)^3 + I_{2j+1} \right]; \quad (3.17)$$

$$k_3 = h \cdot \left[x_j + \frac{k_2}{2} - \left(x_j + \frac{k_2}{2} \right)^3 + I_{2j+1} \right]; \quad (3.18)$$

$$k_4 = h \cdot [x_j + k_3 - (x_j + k_3)^3 + I_{2j+2}]; \quad (3.19)$$

az \mathbf{x} következő értékét itt is a (3.9) összefüggéssel számolhatjuk; időváltozóra nincs is szükség, hiszen azt az \mathbf{I} tömbbe belefoglaltuk a tömb elemeinek meghatározásánál.

A Runge-Kutta-eljárás stabilitására nézve kritikus a h lépésköz megválasztása. Ha ugyanis ez túl nagy, a jobboldalnak megfelelő függvény két lépés közt túlságosan nagyot változhat, így az eljárás instabillá válhat. Mi a lépésközre azt írtuk elő, hogy a szinuszjel T periódusideje ennek egész számú többszöröse legyen:

$$h := \frac{T}{q} = \frac{1}{F \cdot q}, \quad \text{ahol } q \in \mathbf{N} \quad (3.20)$$

Tapasztalataink azt mutatták, hogy $q=128$ -ra az algoritmus nem minden frekvencia esetén stabil, míg $q=256$ -ra minden általunk vizsgált frekvenciára teljesült a stabilitás, ezért az utóbbi felbontásnál maradtunk. Azért a kettő hatványait alkalmaztuk, mert a megoldástömb hosszát (\mathbf{N} -t) is célszerű kettő hatványának választani (a későbbiekben ugyanis Fourier-transzformációt akarunk végezni, és ez olyan tömbökre, amelyek hossza kettő hatványa, a lényegesen kisebb műveleti igényű gyors Fourier-transzformációval is megoldható), így ha \mathbf{N} és q is kettő-hatvány, mindig teljesül, hogy a mintában egész számú periódus van. Ha az utóbbi feltétel nem teljesülne, kiszélesedne a szinuszjel

frekvenciájánál található spektrális csúcs, így a jel/zaj-viszony értékét pontatlanabban tudnánk csak számolni.

3.4. Az időfüggő rész előállítás; az $1/f^x$ -zaj spektrális tulajdonságainak és szórásának beállítása

Az előző alfejezetből kiderült, hogy célszerű az időfüggő részt (a szinuszt és a zajt) reprezentáló tömböt kétszer olyan hosszúnak választani, mint a differenciálegyenlet megoldását megjelenítő tömböt, úgy, hogy az egymást követő tömbelemek az időfüggő rész $h/2$ -vel későbbi értékeinek feleljenek meg.

Az időfüggő rész két tagból áll: a szinuszjelből mint bemenő jelből és a zajból. Ezek közül a szinuszjel előállítása kézenfekvő:

$$s_j := A \cdot \sin\left(2\pi \cdot F \cdot \frac{h}{2} \cdot j\right), \quad \text{ahol } 0 \leq j \leq 2N - 1. \quad (3.21)$$

Így a fent tárgyalt feltételek teljesülnek: a Runge-Kutta-eljárásban a szinusz t_j helyen vett értékének s_{2j} , a $t_j + h/2$ helyen vett értéknek s_{2j+1} , a $t_j + h$ helyen vett értéknek pedig s_{2j+2} felel meg. Megjegyezzük, hogy a szinuszfüggvény periodicitása miatt elegendő lett volna az első $2q$ elemet előállítani és az indexelésnél a $2q$ -val vett maradékot figyelembe venni, de mivel a zajunk nem periodikus és az még hozzáadódik a szinuszjelhez, ezért végeredményben egyszerűbb mind a $2N$ elemet előállítani.

A zajjal kapcsolatban már több a tennivalónk: rendelkezésünkre áll a *LabVIEW 6i* Gauss-eloszlású fehérzajt generáló rutinja, ennek felhasználásával kell a kívánt spektrális eloszlású és szórású zajt létrehozunk. Ezenkívül a Runge-Kutta-eljárás stabilitására is tekintettel kell lennünk: annak érdekében, hogy egy Runge-Kutta-lépés ($h/2$) alatt a zaj ne változzon túl nagyot, előírjuk,

hogy a zaj legnagyobb frekvenciájú összetevőjének egy periódusában legalább húsz Runge-Kutta-lépés legyen. Ez, mivel a Runge-Kutta-eljárás lépésköze adott, a zaj felső határfrekvenciájának korlátozását, azaz a zaj szűrését jelenti.

Mind a spektrális tulajdonságok beállítását, mind a zaj szűrését célszerű frekvenciatartományban elvégezni. Ehhez a kiindulásként szolgáló fehérzaj Fourier-transzformáltját kell vennünk; mivel diszkrét jelekkel dolgozunk, a diszkrét Fourier-transzformációt (illetve ennek kisebb műveleti igényű változatát, a gyors Fourier-transzformációt) kell használnunk. Egy $\{x_j\}_{j=0}^{M-1}$ időfüggő adatsor $\{X_k\}_{k=0}^{M-1}$ diszkrét Fourier-transzformáltjának definíciója a következő:

$$X_k := \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=0}^{M-1} x_j \cdot e^{-i \frac{2\pi}{M} k \cdot j}, \quad \text{ahol } 0 \leq k \leq M-1. \quad (3.22)$$

Ha az időfüggő adatsorban az időköz δt , akkor az X_k komplex szám abszolútértéke az időfüggő jel f_k frekvenciájú összetevőjének amplitúdóját adja meg, ahol

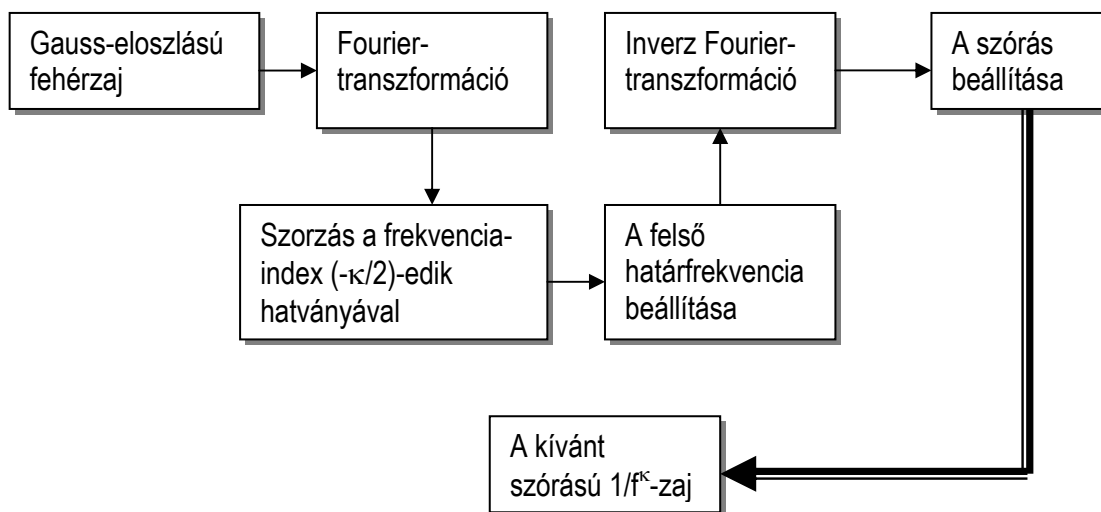
$$f_k = k \cdot \delta f = \frac{k}{M \cdot \delta t}. \quad (3.23)$$

A diszkrét Fourier-transzformált definíciójába behelyettesítve könnyen ellenőrizhető, hogy az X_k komplex együtthatókra az alábbi összefüggés érvényes:

$$X_{M-k} = X_{-k} = \overline{X_k}, \quad (3.24)$$

ahol a felülvonás a komplex konjugálást jelenti. Ha figyelembe vesszük, hogy egy komplex szám abszolútértéke megegyezik konjugáltjának abszolútértékével, ebből az következik, hogy az f_k és az f_{M-k} frekvenciájú összetevőkhöz ugyanazok az amplitúdók tartoznak, továbbá mindkét előbb említett összetevő megfeleltethető egy $-f_k$ frekvenciának. Ez azt eredményezi, hogy a diszkrét Fourier-transzformációval előállított spektrum szimmetrikus lesz mind az $M/2$ indexű pontra, mind az origóra.

Ahhoz, hogy a sztochasztikus rezonanciának a zaj spektrális tulajdonságaitól való függését tanulmányozhassuk, a (2.27) összefüggés szerint olyan zajt kell előállítanunk, amelynek a teljesítménysűrűség-spektruma a frekvencia κ -adik hatványának reciprokával, azaz a frekvencia $(-\kappa)$ -adik hatványával arányos. Ha a *LabVIEW 6i 2⁹⁰* ciklushosszú fehérzaj-generátorát vesszük alapul, a zaj „színe” (a κ kitevő) a fehérzaj spektrális transzformációjával viszonylag egyszerűen hangolható. A (2.24) összefüggés szerint ugyanis a teljesítménysűrűség-spektrum a (2.23)-ban definiált amplitúdó-spektrum abszolútérték-négyzete, az amplitúdó-spektrum viszont a jel Fourier-transzformáltjával arányos (annak időátlaga). Nem kell tehát mást tennünk, mint Fourier-transzformálnunk a fehérzajt, a transzformáltat (amely közelítőleg konstans minden frekvenciára, hiszen fehérzajról van szó) a frekvenciát megjelenítő index $(-\kappa/2)$ -edik hatványával megszoroznunk, és a végén inverz Fourier-transzformációval megkapjuk a kívánt spektrális eloszlású zajt. Frekvencia-tartományban a zaj felső határfrekvenciáját is egyszerűen beállíthatjuk.



3.3. ábra: A zaj előállításának lépései

A fenti áttekintés után vizsgáljuk meg részletesen, hogyan is hajtjuk végre ezt a spektrális transzformációt. Mint említettük, rendelkezésünkre áll egy Gauss-eloszlású fehérzaj, esetünkben egy $\{w_j\}_{j=0}^{2N-1}$ tömb; ennek diszkrét Fourier-transzformáltját jelölje $\{W_k\}_{k=0}^{2N-1}$. Mivel fehérzajról van szó,

$$|w_k| \approx |W_n| \quad \forall k, n : 0 \leq k, n \leq 2N - 1. \quad (3.25)$$

Tekintsük most az alábbi ablakfüggvényt, amely a diszkrét Fourier-transzformáció szimmetriáját tükrözi:

$$\Theta(k) := N - |N - k| = \begin{cases} k, & \text{ha } k \leq N \\ 2N - k, & \text{ha } k \geq N \end{cases} \quad (3.26)$$

Mivel a k index a frekvenciát jeleníti meg a (3.23) összefüggés szerint (esetünkben M , azaz az adatsor hossza $2N$ -nel egyezik meg), a spektrum $\Theta(k)$ ablakfüggvénnyel való szorzása az összetevők amplitúdóját az adatsor feléig a frekvenciával egyenes arányban növeli, az adatsor felétől kezdve pedig a frekvenciával szintén egyenes arányban csökkenti. Nekünk olyan zajra van szükségünk, amelynek a teljesítménysűrűség-spektruma a frekvencia $(-k)$ -edik hatványával, így Fourier-transzformáltja a frekvencia $(-k/2)$ -edik hatványával arányos. Ezért a fehérzaj diszkrét Fourier-transzformáltját a $\Theta(k)$ ablakfüggvény $(-k/2)$ -edik hatványával kell beszoroznunk. Mivel a fehérzaj Fourier-transzformáltja közel konstans (azaz megfelelő számú átlagolás után konstans), eredményként a kívánt spektrális eloszlású zaj Fourier-transzformáltját kapjuk. Ezen a transzformálton még szűrést kell végeznünk a fentebb említett okokból. A szűrést egyszerűen úgy oldjuk meg, hogy egy bizonyos frekvencia (illetve az annak megfelelő λ index) felett az összetevők amplitúdóját nullának választjuk. Ez az alábbi függvénnyel való szorzásnak felel meg:

$$\Phi(k) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \Theta(k) < \lambda \\ 0, & \text{ha } \Theta(k) \geq \lambda \end{cases} \quad (3.27)$$

Végeredményben tehát a kívánt spektrális eloszlású zaj diszkrét Fourier-transzformáltja a következőképpen áll elő:

$$\Xi_k^\kappa := W_k \cdot (\Theta(k))^{-\frac{\kappa}{2}} \cdot \Phi(k) = \begin{cases} W_k \cdot k^{-\frac{\kappa}{2}}, & \text{ha } k < \lambda \\ 0, & \text{ha } \lambda \leq k \leq 2N - \lambda \\ W_k \cdot (2N - k)^{-\frac{\kappa}{2}}, & \text{ha } 2N - \lambda < k \leq 2N - 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

Magát a zajt inverz Fourier-transzformációval kaphatjuk meg:

$$\xi_j^\kappa = \sum_{k=0}^{2N-1} \Xi_k^\kappa \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{2N} \cdot k \cdot j}, \quad 0 \leq j \leq 2N-1. \quad (3.29)$$

Mint már említettük, a zaj felső határfrekvenciáját a Runge-Kutta-eljárás stabilitása érdekében kell korlátoznunk. Ha azt akarjuk, hogy a zaj legnagyobb frekvenciájú összetevőjének egy periódusában húsz Runge-Kutta-lépés legyen, a $h/2$ lépésnek megfelelő $2/h$ frekvencia a zaj felső határfrekvenciájának húszszorosa kell, hogy legyen. Ennek megfelelően kell a λ szűrési indexet meghatározni. A (3.23) összefüggés értelmében a felső határfrekvencia:

$$f_h = f_\lambda = \frac{\lambda}{2N \cdot \frac{h}{2}} = \frac{\lambda}{N \cdot h}, \quad (3.30)$$

mivel a mintahossz $2N$ és az időlépés $h/2$. Ez a felső határfrekvencia a $2/h$ frekvencia huszadrésze:

$$f_h = \frac{\lambda}{N \cdot h} = \frac{1}{10h}, \quad (3.31)$$

így

$$\lambda = \frac{N}{10}. \quad (3.32)$$

Az előzőekben beállítottuk a zaj spektrális tulajdonságait és felső határfrekvenciáját. Hátravan még a zaj szórásának szabályozása; ezt egyszerűen úgy végezzük el, hogy kiszámítjuk a $\{\xi_j^\kappa\}_{j=0}^{2N-1}$ adatsor szórását, ezzel leosztjuk az egész tömböt, majd megszorozzuk a kívánt σ szórással:

$$\xi_j^{\kappa, \sigma} := \sigma \cdot \frac{\xi_j^\kappa}{D(\xi^\kappa)}, \quad 0 \leq j \leq 2N-1. \quad (3.33)$$

Az így kapott adatsor már a kívánt „színű” és szórájú zajt reprezentálja; a spektrális eloszlást és a szórást megjelenítő paramétereket tetszőleges lépésben változtatni tudjuk, így lehetővé válik, hogy a különböző zajtípusok sztochasztikus rezonanciára gyakorolt hatását vizsgáljuk.

Végeredményben az időfüggő részt megjelenítő tömböt a szinusz és a zaj összegeként állítjuk elő:

$$I_j := s_j + \xi_j^{\kappa, \sigma}, \quad 0 \leq j \leq 2N - 1. \quad (3.34)$$

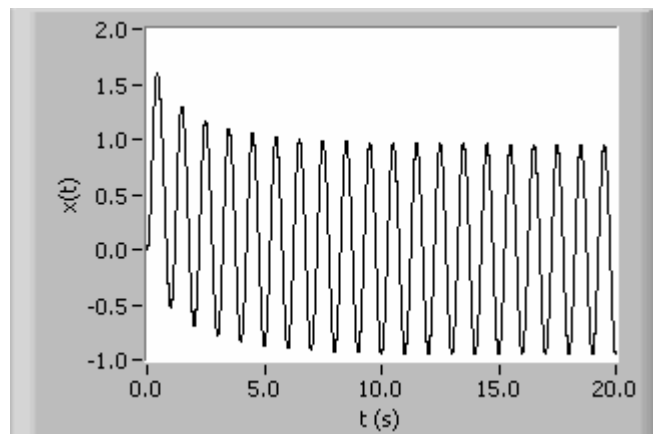
Ezt a tömböt a Runge-Kutta-algoritmus során a már tárgyalt módon kiindexelve jelentősen meggyorsíthatjuk az algoritmus végrehajtását, hiszen nem kell minden iterációs lépésben függvényeket meghívunk.

3.5. A kimenő jel

A Runge-Kutta-eljárás lefutása után egy $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ tömböt kapunk, ami a (3.7) differenciálegyenlet $\mathbf{x}(t)$ megoldásának felel meg az alábbiak szerint:

$$x_j = x(j \cdot \delta t) = x(j \cdot h). \quad (3.35)$$

Ez a megoldásfüggvény azonban még transzienseket tartalmaz, ahogy ez a 3.4. ábrán is látható:



3.4. ábra: A differenciálegyenlet megoldása zaj nélkül, transziensekkel együtt ($F=1\text{Hz}$, $A=6$ egység)

Nem tudhatjuk előre, hogy a transziensek milyen hosszú tartományt ölelnek fel, ezért a legkézenfekvőbb megoldás, ha a megoldástömb első felét eldobjuk, és csak a maradék $\{x_j\}_{j=N/2}^{N-1}$

többel számolunk tovább. Ez a megoldás nem takarékoskodik ugyan a gépidővel, de legalább biztosan kiszűri a tranzienseket.

A kimenő jelünk még nem közvetlenül ez a tranziensektől megszabadított megoldásfüggvény lesz. Sokkal szemléletesebb ugyanis, és a céljainknak is jobban megfelel, ha a kimenő jel csak azt az információt tartalmazza, hogy a részecske átment-e egyik potenciálvölgyből a másikba. Ekkor küszöbalatti szinusz-amplitúdó esetén nem is jelenik meg konstanstól különböző jel a kimeneten. Mivel a kettős potenciálvölgy minimumhelyei egymás ellentettjei (lásd 3.1. ábra), a kimenő jelet egyszerűen úgy kaphatjuk meg, hogy a megoldásfüggvény előjelét vesszük. Ez a tranziensek kiszűréséről mondottakat is figyelembe véve a következőképpen tehető meg:

$$y_j := \begin{cases} 1, & \text{ha } x_{(N/2)+j} > 0 \\ 0, & \text{ha } x_{(N/2)+j} = 0, \\ -1, & \text{ha } x_{(N/2)+j} < 0 \end{cases} \quad 0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1. \quad (3.36)$$

Kimenő jelünk tehát a (3.36) által definiált $\{y_j\}_{j=0}^{(N/2)-1}$ tömb lesz, ez hordozza azt az információt, hogy a szinuszos gerjesztés és a zaj együttesen átvitte-e a részecskét egyik potenciálvölgyből a másikba. A továbbiakban ennek a jelnek fogjuk a teljesítménysűrűség-spektrumát vizsgálni, majd a rá jellemző jel/zaj-viszony értékét fogjuk kiszámítani.

3.6. A teljesítménysűrűség-spektrumok számítása, a spektrumok átlagolása

A teljesítménysűrűség-spektrum számításához kész *LabVIEW*-rutin áll rendelkezésre. Bemenő paraméterként az időtartománybeli adatsort, annak idő-lépésközét, és a használni kívánt ablakfüggvényt kell megadnunk, eredményül a jel teljesítménysűrűség-spektrumát kapjuk. Az ablakfüggvény kiválasztására különösen ügyelnünk kell, mivel zajok vizsgálatánál semmilyen ablakfüggvény használata sem javasolt.

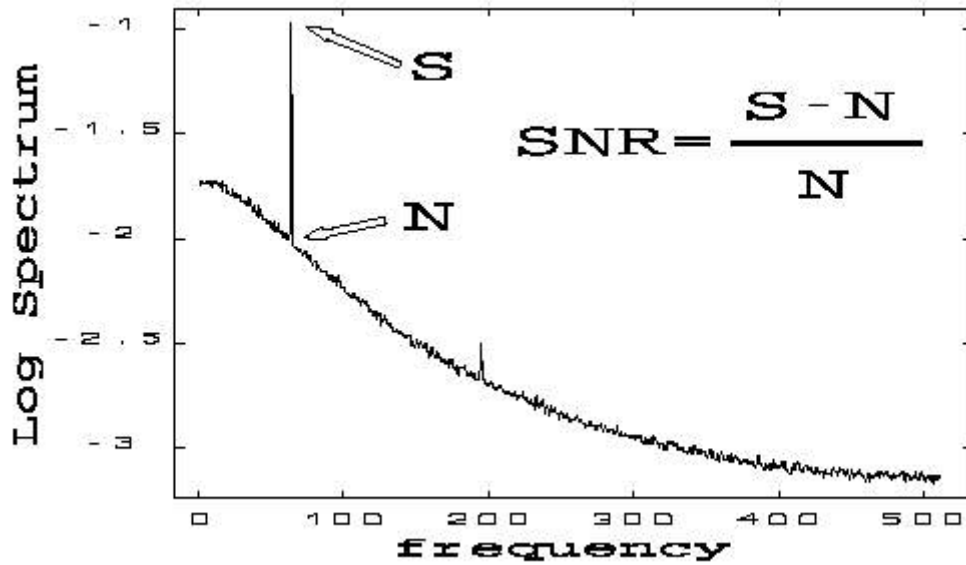
Eddig nem tértünk ki arra, hogy a (2.27)-ben leírt spektrális szabályszerűség csak számos spektrum átlagolása után lesz érvényes. Most azonban ezt a tényt figyelembe kell vennünk, így egyetlen teljesítménysűrűség-spektrum vizsgálata helyett számos (esetünkben 1000) teljesítménysűrűség-spektrumot kell átlagolnunk. A fent említett *LabVIEW*-rutin a spektrumok átlagolására is alkalmas egyben, csak egy ciklust kell köré szervezni, amely a kívánt átlagok számával megegyező alkalommal állítja elő a zajt és oldja meg a (3.7) differenciálegyenletet; a rutin kiszámolja az egyes kimenő jelek spektrumát és végeredményként egyetlen átlagolt teljesítménysűrűség-spektrumot ad ki. Ezen átlagolt teljesítménysűrűség-spektrum alapján számolhatjuk az adott spektrális eloszlású és szórású zaj esetén a kimenő jelre jellemző jel/zaj-viszonyt.

3.7. A jel/zaj-viszony számítása

Az előző alfejezetekben láttuk, hogyan áll elő adott zajtípus és zajszórás esetén a (3.7) differenciálegyenlet megoldása, majd ebből a kimenő jel, végül a kimenő jel átlagolt teljesítménysűrűség-spektruma. A sztochasztikus rezonancia vizsgálatához már csak a jel/zaj-viszonyt kell kiszámítanunk. Ehhez a jel/zaj-viszony (2.39)-ben adott definíciójától némileg eltérő módszert alkalmazunk: vesszük a kimenő jel teljesítménysűrűség-spektrumát az első spektrális csúcsnál (azaz a periodikus jel F frekvenciájának megfelelő pontban), ebből kivonjuk a háttérzaj teljesítménysűrűség-spektrumának a csúcstól jobbra és balra eső 3-3 pontban vett átlagát, majd az eredményt elosztjuk az előbb említett háttérzaj-átlaggal. Az eljárást a 3.5. ábra szemlélteti.

A (3.23) összefüggés értelmében egy M pontból álló, δt időlépéssel vett időfüggő adatsor spektrumában a frekvenciaegység a következő:

$$\delta f = \frac{1}{M \cdot \delta t} . \quad (3.37)$$



3.5. ábra: A jel/zaj-viszony kiszámításának vázlata

Esetünkben a kimenő jel pontjainak száma $N/2$, az időlépés h , így a frekvenciaegység:

$$\delta f = \frac{1}{\frac{N}{2} \cdot h} = \frac{2}{N \cdot h}. \quad (3.38)$$

Az első spektrális csúcs a bemenő jel F frekvenciájánál van, ennek indexe:

$$m = \frac{F}{\delta f} = F \cdot \frac{N \cdot h}{2}. \quad (3.39)$$

Figyelembe véve a Runge-Kutta-eljárás h lépésközének (3.20)-ban foglalt előállítását:

$$m = F \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{F \cdot q} = \frac{N}{2q}, \quad (3.40)$$

ahol q azt mutatja meg, hány Runge-Kutta-lépés van a bemenő jel egy periódusában, azaz hányszorosa a bemenő jel periódusideje az általunk választott időkvantumnak. Az első spektrális csúcs tehát az m indexnél van, ennek segítségével a jel/zaj-viszony a következőképpen számolható ki (az $\{S_j\}_{j=0}^{(N/2)-1}$ tömb a kimenő jel átlagolt teljesítménysűrűség-spektrumát jelenti):

$$SNR = \frac{S_m - \frac{1}{6} \cdot \sum_{\substack{i=m-3 \\ i \neq m}}^{m+3} S_i}{\frac{1}{6} \cdot \sum_{\substack{i=m-3 \\ i \neq m}}^{m+3} S_i}. \quad (3.41)$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a fenti módon számított jel/zaj-viszony nem lesz független az adatsorban szereplő pontok számától, hiszen minél több pont van, annál szélesebb tartományon oszlik el ugyanaz a teljesítmény. Ez az állítás a diszkrét számítási módszerek figyelembevételével egyszerűen belátható; mi azonban itt nem foglalkozunk ezzel, hiszen a különböző adatsorokban a pontok száma ugyanaz, így ez a módszer is alkalmas különböző zajtípusok hatásának összehasonlítására.

A (3.41) összefüggéssel tehát meg tudjuk határozni adott spektrális összetételű és szórású zaj esetén a kimenő jelre jellemző jel/zaj-viszonyt. A szimuláció során különböző zajtípusokra kell a rezonanciagörbét (a jel/zaj-viszony függését a zajszórástól) meghatároznunk; ehhez először beállítjuk a zaj „színét” jellemző κ paramétert, és ezt konstans értéken tartva növekvő zajszórásokra meghatározzuk a jel/zaj-viszonyt, így egy adott zajtípusra megkapjuk a jel/zaj-viszony függését a zajszórástól. Az eljárást más κ -értékekre is megismételve feltérképezhetjük, hogyan függ a sztochasztikus rezonancia a zaj típusától.

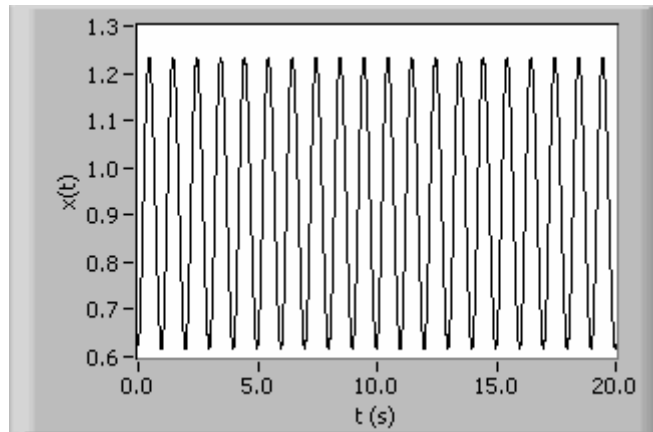
3.8. A numerikus szimuláció paraméterei

Az előző alfejezetekben vázoltuk a numerikus modellezés módszereit; itt, a reprodukálhatóság és az eredmények ellenőrizhetősége érdekében felsoroljuk a szimuláció konkrét paramétereit.

Az adatok számát (azaz a (3.7) differenciálegyenlet megoldását megjelenítő tömb elemszámát), N -t, 16384-nek választottuk; ahogy ezt a 3.4 alfejezetben megindokoltuk, a bemenő jel és a zaj pontjainak száma ennek kétszerese, azaz 32768 volt. A bemenő szinuszjel frekvenciája, F , 1 Hz volt, periódusonként 256 lépést tettünk a Runge-Kutta-eljárásban ($q=256$), azaz a h lépésköz a (3.20) összefüggésnek megfelelően 0,00390625 s volt. A bemenő jel amplitúdóját 2 egységnek választottuk; ez a küszöb meghaladásához szükséges értéknek körülbelül a fele, így a bemenő jel önmagában nem hozhatott létre kimenő jelet. A zaj felső határfrekvenciája a (3.31) összefüggés értelmében 25,6 Hz volt minden esetben. A zaj spektrális összetételét jellemző κ paraméter értékét 0-tól 2-ig változtattuk, 0,1-es lépésként. A teljesítménysűrűség-spektrum értékét 1000 átlagból számoltuk. Egy-egy rezonanciagörbét 30 pontban vettünk fel; a zaj szórásának maximális értéke 12 egység volt.

4. Eredmények

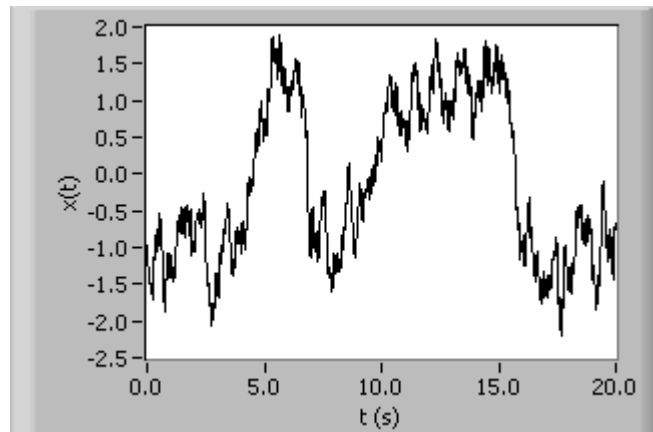
A (3.7) differenciálegyenlet megoldását zaj nélkül, a fent részletezett paraméterek mellett a 4.1. ábra szemlélteti. Látható, hogy a részecske a pozitív tartományban oszcillál a bemenő jel frekvenciájával megegyező frekvenciával; a potenciálgát képezte küszöböt nem képes meghaladni.



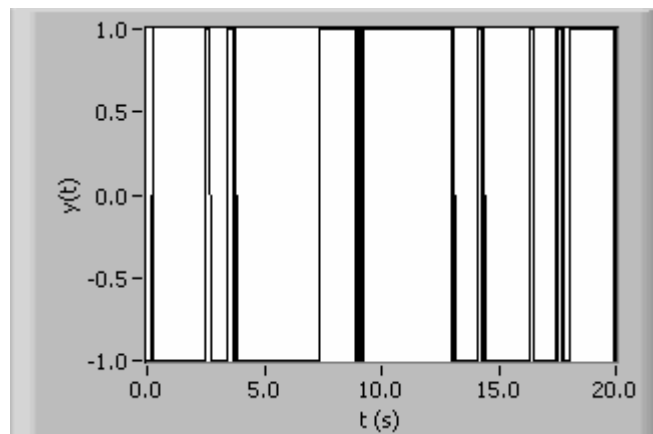
4.1. ábra: A megoldásfüggvény zaj nélkül, 1 Hz-es, 2 egység amplitúdójú bemenő jelre (t az idő, $x(t)$ a részecske helye az idő függvényében)

Ha a bemenő jelen kívül zajt is adunk a rendszerhez, a részecske már képes átlépni a küszöböt. A 4.2. ábra a megoldásfüggvényt mutatja 7,6 egység szórású fehérzaj hozzáadása esetén. Itt a részecske már a negatív tartományon is tartózkodik, tehát a zaj hozzásegítette ahhoz, hogy a küszöböt átlépje.

Mint már említettük, az általunk tanulmányozott kimenő jel nem közvetlenül a (3.7) differenciálegyenlet megoldása, hanem a megoldás előjele. A kimenő jel alakját 7,6 egység szórású fehérzajra a 4.3. ábra mutatja be.

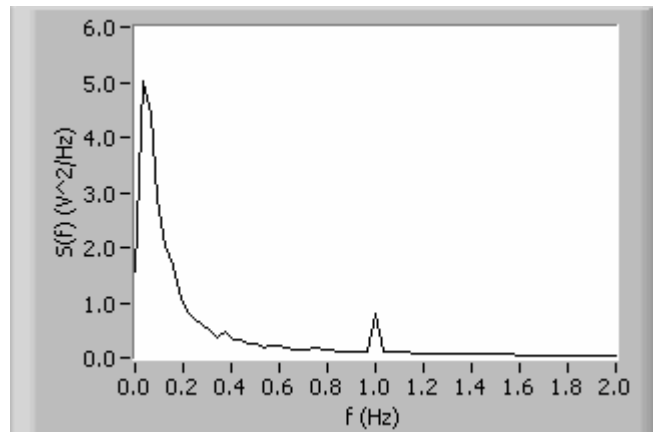


4.2. ábra: A megoldásfüggvény 7,6 egység szórású fehérzaj hozzáadása esetén



4.3. ábra: A kimenő jel 7,6 egység szórású fehérzaj hozzáadása esetén

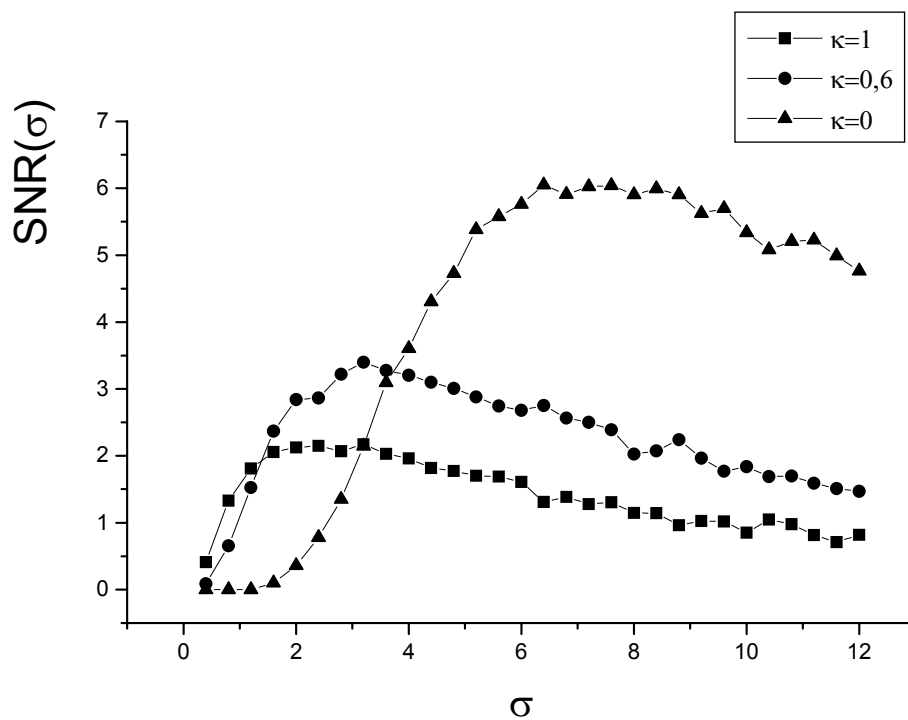
A kimenő jel teljesítménysűrűség-spektrumát a 4.4. ábrán tüntettük fel, 7,6 egység szórású fehérzaj hozzáadásával, 100 szimuláció átlagából. Az ábráról leolvasható, hogy a bemenő jel frekvenciájánál, azaz 1 Hz-nél egy csúcs található. Mi e csúcs környezetében számoltuk ki a jel/zaj-viszonyt; látható azonban, hogy a zajteljesítmény jelentős része az alacsony frekvenciákon összpontosul.



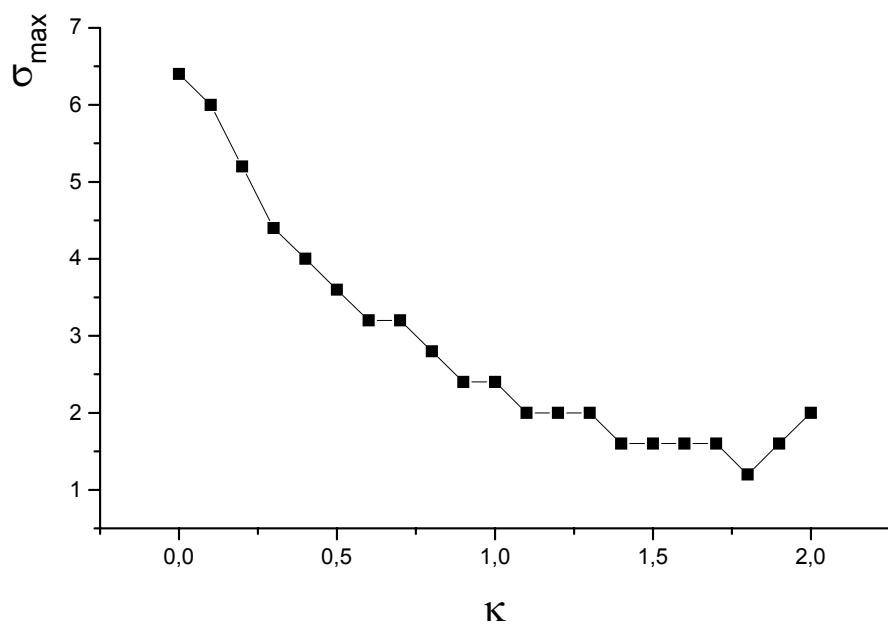
4.4. ábra: A kimenő jel teljesítménysűrűség-spektruma 7,6 egység szórású fehérzaj hozzáadása esetén

Az átlagolt teljesítménysűrűség-spektrumokból jel/zaj-viszonyt számolhatunk; a jel/zaj-viszony zajszórástól való függését kirajzolva a sztochasztikus rezonancia görbéihez jutunk. A 4.5. ábra háromféle zajra ($1/f$ -zajra, $1/f^{0,6}$ -zajra és fehérzajra) szemlélteti a sztochasztikus rezonanciát, az ábrán jól megfigyelhető a különféle zajtípusok hatása közötti különbség.

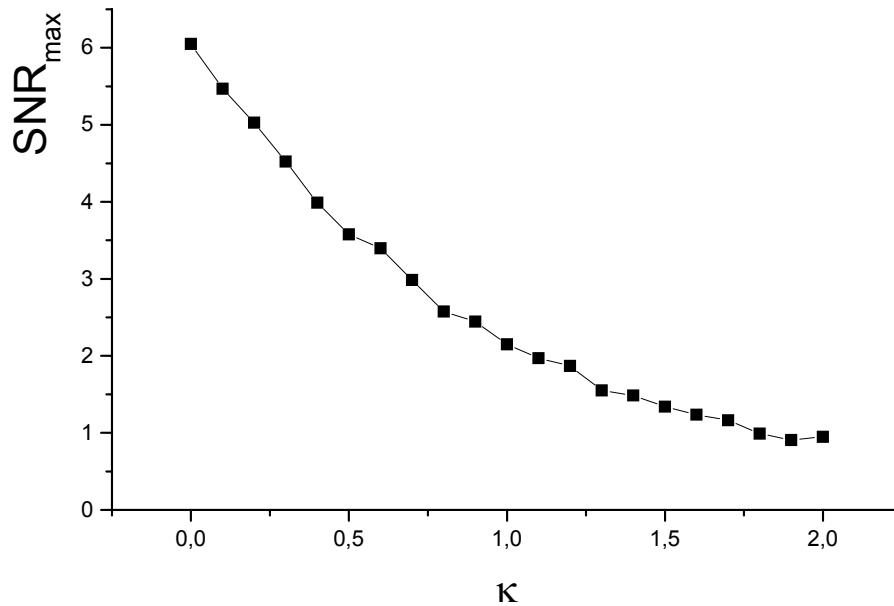
Célunk az volt, hogy bemutassuk, a sztochasztikus rezonancia jellemző paraméterei, azaz a rezonanciához szükséges zajszórás és a rezonanciaesetben tapasztalható jel/zaj-viszony, hogyan függenek a zaj spektrális eloszlását jellemző κ paramétertől. Eredményeinket a 4.6. és a 4.7. ábrák foglalják össze.



4.5. ábra: Sztochasztikus rezonancia különböző zajtípusokra (σ a zajszórási, SNR a jel/zaj-viszony)



4.6. ábra: A rezonanciához szükséges zajszórási függése a zaj „színétől” (σ_{\max} a rezonanciához szükséges zajszórási, κ a spektrális paraméter)



4.7. ábra: A rezonanciaesetben tapasztalható jel/zaj-viszony függése a zaj „színétől” (SNR_{max} a jel/zaj-viszony rezonanciaesetben, κ a spektrális paraméter)

Az ábrák tanúsága szerint a fehérzajjal történő gerjesztés ugyan nagyobb jel/zaj-viszonyt eredményez, mint a színes zajú gerjesztések, ez utóbbiak alkalmazásával azonban már kisebb zajszórások esetén is bekövetkezik a sztochasztikus rezonancia. A 4.6. ábráról továbbá az is leolvasható, hogy a rezonanciához szükséges zajszórás korántsem az $1/f$ -zaj esetén minimális, azaz nem mondhatjuk, hogy az $1/f$ -zaj optimalizálná a sztochasztikus rezonanciát.

5. Összefoglalás

E dolgozat célja az volt, hogy egy bistabil rendszerben bemutassa, hogy a sztochasztikus rezonancia bekövetkezéséhez szükséges zajszórás és a rezonanciaesetben tapasztalható jel/zaj-viszony hogyan függ a rendszerhez adott zaj típusától. Ehhez olyan zaj-előállítási módszert használtunk, amelyben a zaj „színét” tetszőlegesen finom léptékben hangolni lehetett.

A dolgozatban először a sztochasztikus rezonancia tárgyalásához szükséges alapvető fogalmakat tekintettük át, majd a bistabil rendszer leírására és numerikus modellezésének részletezésére térünk ki, különös tekintettel a tetszőleges spektrális eloszlású zaj előállítását lehetővé tevő zajgenerálási módszerre. Ezután egy-egy ábrán bemutattuk a modellezés egyes részfeladatainak konkrét megvalósulását, végül a sztochasztikus rezonancia bekövetkezéséhez szükséges zajszórás és a rezonanciaesetben tapasztalható jel/zaj-viszony zajszíntől való függését ábrázoltuk.

Eredményeink azt mutatták, hogy az $1/f^{\kappa}$ -típusú zaj spektrális eloszlását jellemző κ paraméter növekedésével (azaz a fehérzajtól való távolodással) csökken ugyan az elérhető jel/zaj-viszony, viszont kisebb zajszórások is elegendőek a rezonancia létrejöttéhez. Azt találtuk, hogy a bistabil rendszer esetében az $1/f$ -zaj nem játszik kitüntetett szerepet; nem ez a zajtípus optimális a sztochasztikus rezonancia megvalósításához.

A dolgozatban vázolt szimulációt egyelőre szinuszos bemenő jelre végeztük el, továbbá csak a kimeneten vizsgáltuk a jel/zaj-viszonyt. A jövőben a szimulációt többféle irányba is tovább szeretnénk fejleszteni: tanulmányozzuk a sztochasztikus rezonancia zajtípustól való függését más periodikus bemenő jelekre (például különböző kitöltési tényezőjű négyszögjelekre) is, illetve a bemeneten és a kimeneten számolt jel/zaj-viszonyok összehasonlításával megnézzük, hogy lehetséges-e, és ha igen, milyen zajtípusokra optimális a jel/zaj-viszony javulása. Mivel a numerikus

differenciálegyenlet-megoldó algoritmusok esetleges instabilitása, illetve az esetlegesen fellépő más számítási artefaktumok óvatosságra intenek az eredményeink megbízhatóságát illetően, mindenképpen szükség van analóg szimulációval való összevetésre is; itt azonban a zaj spektrális típusának kellően finom léptékben való hangolása még megoldásra vár.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr Gingl Zoltánnak, hogy segítséget nyújtott a kutatási téma kiválasztásában és a felmerült problémák megoldásában, és a Kísérleti Fizikai Tanszék vezetésének, hogy lehetővé tette számomra, hogy a tanszéken végezhessem munkámat.

Irodalomjegyzék

- [1]: Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete*. Gondolat, Budapest, 1981
- [2]: A Einstein, B Podolsky, N Rosen, 'Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?' *Physical Review* **41** (1935), 777
- [3]: J Bell: 'On the Einstein Podolsky Rosen paradox' *Physics* **1 3** (1964), 195
- [4]: D Nozaki, Y Yamamoto, *Physics Letters A* **243** (1998), 281
- [5]: Denkinger Géza: *Valószínűségszámítás*
- [6]: Dr Gingl Zoltán: *1/f zaj generálása a Brown-mozgás skálázása alapján* (doktori értekezés; JATE 1992)
- [7]: L Gammaitoni, P Hänggi, P Jung, F Marchesoni, *Reviews of Modern Physics*, Vol 70, **1** (1998), 223
- [8]: B McNamara, K Wiesenfeld, R Roy, *Physical Review Letters* **60** (1988), 2626
- [9]: G Debnath, T Zhou, F Moss, *Physical Review A* **39** (1989), 4323
- [10]: L Gammaitoni, F Marchesoni, E Menichella-Saetta, S Santucci, *Physical Review Letters* **62** (1989), 349
- [11]: G Vemuri, R Roy, *Physical Review A* **39** (1989), 4668
- [12]: T Zhou, F Moss, *Physical Review A* **41** (1990), 4255
- [13]: D Gong, G R Qin, G Hu, X D Weng, *Physics Letters A* **159** (1991), 147
- [14]: B McNamara, K Wiesenfeld, *Physical Review A* **39** (1989), 4854
- [15]: D E Knuth: *A számítógép-programozás művészete*. Műszaki Kiadó, Budapest, 1987