

Diplomamunka

# Nemdinamikai Sztochasztikus Rezonancia

Írta:

**Lőrincz Károly**

fizikus hallgató

József Attila Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Kísérleti Fizikai Tanszék

Témavezető:

Dr. Gingl Zoltán

Szeged

1995

## **Köszönetnyilvánítás**

Köszönetemet fejezem ki Dr. Gingl Zoltánnak a téma kijelöléséért, és a munka során felmerült problémák megoldásában nyújtott segítségéért,

a Kísérleti Fizikai Tanszék vezetésének, hogy lehetővé tette számomra munkámnak a tanszéken való elvégzését,

a Kísérleti Fizikai Tanszék minden dolgozójának, akik segítségükkel támogatták munkámat.

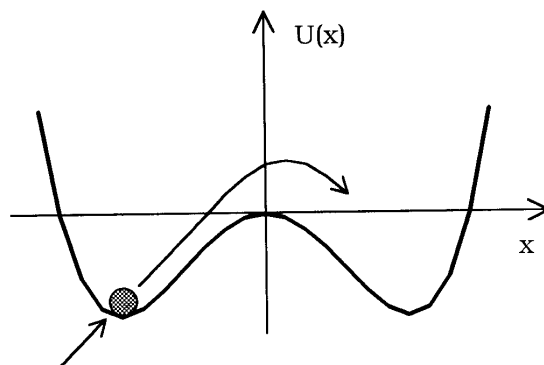
## Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b> .....	1
<b>2. Irodalmi összefoglalás</b> .....	4
2.1 Sztochasztikus jelek leírása .....	4
2.2 Statisztikai jellemzők.....	5
2.3 Sztochasztikus folyamatok .....	9
2.4 Valószínűségi sűrűségfüggvények.....	12
2.5 Statisztikai folyamatok spektrális analízise.....	15
2.6 Fizikai zajtípusok osztályozása .....	19
2.7 A zajtípusok előállításának algoritmusai.....	21
<b>3. A sztochasztikus rezonanciát mutató szintmetszési modell</b> <b>általános leírása</b> .....	23
<b>4. A szintmetszési modell jellemzőinek kiszámítása</b> .....	26
4.1 A modell elméleti alapjainak ismertetése.....	26
4.2 Új elméleti eredmények .....	31
<b>5. A szintmetszési modellel végzett numerikus eredmények</b> <b>feldolgozása</b> .....	33
5.1 A normális eloszlású fehér zaj esetén kapott eredmények.	33
5.2 A Lorentzi zaj felhasználásával nyert eredmények.....	36
<b>6. Az eredmények diszkussziója</b> .....	39
<b>Irodalom</b> .....	41

## 1. Bevezetés

Az utóbbi évtizedek zajos nemlineáris irodalmának a sztochasztikus rezonancia effektusa az egyik legérdekesebb témája. A sztochasztikus rezonanciát mutató rendszerek [1] bemenetei lehetnek, különféle zajok, és adott frekvenciájú szinusz jel, tehát ez a rendszer véletlenszerű és periodikus gerjesztését jelenti. A sztochasztikus rezonancia jelensége abban áll, hogy a bemenő zajnak létezik egy optimális erőssége, amely értéknél a rendszer kimenő jel/zaj viszonya éppen az adott jel frekvenciájánál maximális értékű. Ez nagyon érdekes és néha paradox jelenség, ennek ellenére ez mutatja azt, hogy ezen rendszerek esetén határozott nagyságú véletlenszerű gerjesztés szükséges az optimális válasz fennállásához. A zaj hozzáadása így segíthet a jel/zaj viszony növelésében. A sztochasztikus rezonancia előfordul fizikai és biológiai rendszerekben [2,3,4], a neuron jelek optimális átvitelében.

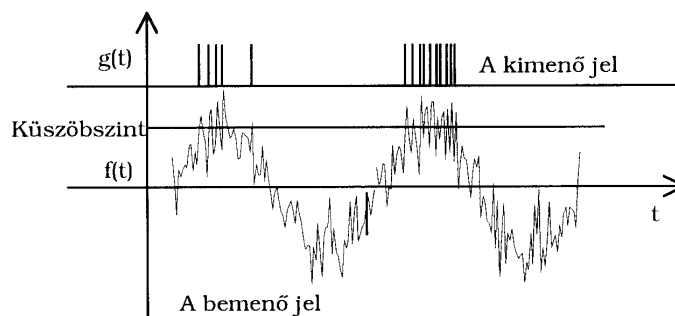
Az érdeklődés az időben modulált, sztochasztikus, nemlineáris rendszerek után különösen megnőtt az utóbbi években. Az olyan rendszerek állnak az érdeklődés középpontjában, amelyek a dinamikai bifurkációk természetének tanulmányozására irányulnak [5]. A sztochasztikus rezonancia valamiféle specializált példa annak az eredménynek az igazolására, amit a kombinált periodikus és sztochasztikus hatásra érzékeny multistabil, nemlineáris rendszereknél tapasztalunk. Számos példát említhetünk a modern alkalmazások széles területéről. Ilyenek a lézeres alkalmazások, a szupravezetős kvantum interferenciás eszköz (SQUID), amellyel detektálni lehet a zajos mágneses mezőket, a zajos digitális információ feldolgozás, és a zaj indukált információ áramlás az érzékelő neuronokban.



1. ábra; A klasszikus modell

A sztochasztikus rezonanciára, mint fizikai jelenségre egydimenziós esetben nagyon egyszerű példát mondhatunk [6]. Vegyünk egy részecskét, amely egy kettős potenciálgödörben mozog egy véletlen erő hatására (1.ábra). A rendszer egy hőtartállyal lehet kapcsolatban, és ebben az esetben a véletlen erőt egyszerűen a termális fluktuáció okozza. Ez az egyszerű rendszer kiinduló pontját képezi sok molekula-dinamikai modellnek és nagyon sok más változatos fizikai alkalmazásnak [7,8]. Mindemellett feltesszük, hogy a rendszert egy külső gyenge periodikus jellel is gerjesztjük. Ez a gerjesztés egymagában nem elegendő ahhoz hogy a részecske átkerüljön az egyik gödörből a másikba a közöttük levő potenciál falon. Mégis, bizonyos esetekben azt tapasztaljuk, hogy ilyen előfordul. Ezt azzal magyarázhatjuk hogy a periodikus gerjesztés mellett jelenlévő véletlen fluktuációk együttes hatására elegendően nagy energiára tehet szert a részecske ahhoz, hogy át tudjon jutni a potenciál falon. Tehát, amikor a részecskét kis amplitúdójú rezgéssel gerjesztjük, akkor kötött rendszerként viselkedik, de ha feltesszük hogy zaj előfordul, márpedig az mindig van, akkor mindig lesz nullánál nagyobb valószínűséggel olyan esemény, amely kibillentí a részecskét a periodikus mozgásából, és adott időn belül át fog kerülni a potenciálfal másik oldalára.

Az elmúlt évig az volt az általános nézet, hogy a sztochasztikus rezonancia jelensége csak a dinamikai rendszerekben fordul elő. Először '93 végétől javasoltak nemdinamikai rendszereket [9]. Ezek közül a legfontosabb egy szintmetszési folyamaton alapuló nemdinamikai rendszer [10,11], amely szintén mutatja a sztochasztikus rezonancia effektusát.



2.ábra; Egy szintmetszési jel

A rendszer elve az, hogy ha a bemeneti jel a küszöbszintet alulról felfelé meghaladja, akkor pulzus jelenik meg a kimeneten (2.ábra). A jel frekvenciájától függően, ezen impulzusok periodikus sűrűsödő csoportjait figyelhetjük meg. A kimenet spektrumát tanulmányozva, érdekes viselkedést mutató rezonanciákat láthatunk, a jel alap- és felharmonikusainál.

A dolgozatban is ezt az új, nagyon egyszerű és alapvető rendszert vizsgálom, amelynél a gyenge gerjesztésen kívül véletlen esemény is jelen van, és ennek hatására különös viselkedést, sztochasztikus rezonanciát mutat. A bemutatott új rendszernek egyedülálló tulajdonságai vannak melyek a nemdinamikai jellegéből származnak. Mivel a rendszer hasonló néhány egyszerű neuron modellhez az új eredményeknek nemcsak fizikai hanem biológiai jelentősége is van.

A tárgyalt rendszer előnyei, hogy nagyon egyszerű, sztochasztikus rezonanciát mutató nem-dinamikai rendszer, ezért a sztochasztikus rendszerek alapvető megértéséhez nagymértékben hozzájárul.

## 2. Irodalmi összefoglalás

### 2.1 Sztochasztikus jelek leírása

A gyakorlatban a sztochasztikus jelek általában feszültség formájában jelennek meg, ezért a jelek jellemzőinek leírását a feszültségfüggvény vizsgálatán keresztül vezetjük be. A számítógépes modellekkel előállított folyamatok ezen jelek diszkrét realizációjának tekinthetők. Egy  $U(t)$  feszültségjelet a rá vonatkozó matematikai leírás alapján két fő csoportba oszthatjuk:

- a. determinisztikus
- b. sztochasztikus.

Egy rendszer valamely  $t_0$  időpillanatbeli állapotát ismerve, a múltjára és jövőjére nézve is információkat nyerhetünk. Determinisztikusnak nevezzük az olyan rendszereket, amelyek viselkedése valamely tetszőleges időpontban pontosan megjósolható a  $t_0$  időpillanatbeli állapotából. A másik csoportba tartozó rendszerek véletlenszerűen viselkednek. Az ezen folyamatokat leíró jelek jövőbeli értéke, a múltbeli viselkedésük alapján, közelítően adható meg a valószínűségelmélet módszereivel. Tekintsük át az ehhez szükséges fogalmakat.

## 2.2 Statisztikai jellemzők

Bár a sztochasztikus folyamatok eredményeképpen létrejövő zajok véletlenszerűek, a véletlen események mögött statisztikus törvényszerűségek húzódnak meg. Ezek felismerhetősége feltételezi az események tetszőleges sokszor, azonos körülmények között való elvégezhetőségét. A fizikai kísérletekre ez a feltétel közelítőleg teljesül. Valamely esemény nagyszámú bekövetkezése esetén értelmezhetjük a relatív gyakoriságot: ha  $n$  számú kísérletből valamely  $A$  esemény  $n_A$ -szor következik be, az

$$\frac{n_A}{n} \quad (1)$$

számot az  $A$  esemény relatív gyakoriságának nevezzük. Hogy ez az érték a kísérletek növekvő száma mellett sztochasztikusan konvergál, a valószínűség számítás gyakorlati alkalmazhatóságának alapját képezi [12,13]. A valószínűségelméleten belüli ezt alátámasztó tételt, a nagy számok törvényének nevezzük. Tehát azt mondhatjuk, hogy létezik a következő határérték [12]:

$$P_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (2)$$

Ezt a számot az  $A$  esemény bekövetkezési valószínűségének nevezzük. A kísérletek kimeneteleképpen bekövetkező események halmazán, mint eseménytérén értelmezett bármely függvényt valószínűségi változónak nevezzük. A fizikai kísérleteinkben egy elemi esemény egy adott feszültségérték mérése, a hozzárendelt valószínűségi változót a mért számérték jelenti. Az ezen értékekhez rendelt (2) valószínűségek a zaj amplitúdójának statisztikai jellemzését adják. A következő kifejezésekből a pontos definíciókat kapjuk.



### Az elsőrendű valószínűségi sűrűségfüggvény

$N$  számú egyenértékű, egymástól független rendszert egyidőben vizsgálva legyen  $\Delta N$  azon jelek száma, amely amplitúdója az  $x$  és  $x + \Delta x$  értékek közé esik egy adott  $t_a$  időpontban, ekkor az első valószínűségi sűrűségfüggvény definíciója [14]:

$$P_1(x, t_a) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta N}{N} \frac{1}{\Delta x}. \quad (3)$$

Az előzőekben definiált sűrűségfüggvény segítségével újabb hasznos számértékeket definiálhatunk.

### Statisztikus középérték

A jel várható értékét adja meg, elsőrendű momentumnak is nevezik [14]:

$$M(x(t_a)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_1(x, t_a) dx. \quad (4)$$

### Négyzetes középérték

A folyamat átlagos teljesítményével arányos értéket ad:

$$M(x(t_a)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_1(x, t_a) dx. \quad (5)$$

### Szórásnégyzet

A jel által felvett értékek a középértéktől bármely távol eshetnek. A szórásnégyzet a középértéktől való átlagos négyzetes eltérést jellemzi, varianciának is nevezik:

$$D^2(x(t_a)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 p_1(x, t_a) dx = M(x^2) - M(x)^2. \quad (6)$$

A szórás (a (6) kifejezés négyzetgyöke) pedig azt jellemzi, mennyire sűrűsödnek az amplitúdó értékek a középérték köré.

Az eddig bevezetett középértékek egy általános,  $n$ -ed rendű momentumnak nevezett kifejezésbe foglalhatók, de szemléletes kép csak az előzőekben látott integrálokhoz rendelhető [13].

### Modus

Egy valószínűségi változó azon értékét nevezzük módusnak, amely mellett a sűrűségfüggvényének maximuma van [13].

### Több valószínűségi változó

A kísérletekben a méréskor előforduló lehetséges értékek halmazához, mint eseménytérhez két valószínűségi változót rendelünk, ezek a két egymás után mért értékek számértékeivel egyeznek meg. Legyen  $A$  és  $B$  a két esemény, ezek együttes bekövetkezése esetén az  $A$  esemény  $B$ -re vonatkozó feltételes valószínűségét a következőképpen értelmezzük [13]:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad (7)$$

ahol  $P(AB)$  a két esemény együttes előfordulása esetén a (2)-ben értelmezett valószínűség.

### Második valószínűségi sűrűségfüggvény

Tekintsünk ismét  $N$  számú egyenértékű, egymástól független rendszert a  $t_a$  és  $t_b$  időpontokban. Legyen  $\Delta N$  most azon jelek száma, melyek  $x$  amplitúdója a  $t_a$  időpontban  $x$  és  $x + \Delta x$  közé, a  $t_b$

időpontban pedig  $x'$  és  $x' + \Delta x'$  értékek közé esik. A második valószínűségi sűrűségfüggvény definíciója [14]:

$$p_2(x, t_a, x', t_b) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x' \rightarrow 0}} \frac{\Delta N}{N} \frac{1}{x} \frac{1}{\Delta x'}. \quad (8)$$

### Kovariancia, korrelációs együttható

Ha több valószínűségi változót vizsgálunk egyszerre, felmerül ezek egymástól való függése. Ezen függés szorosságát is egy számmal jellemezhetjük. Legyen  $\xi$  és  $\eta$  két valószínűségi változó melyek csak sztochasztikusan függenek egymástól, ezek együttes kovarianciáját (azaz együttes szórásnégyzetét) a következő összefüggés definiálja [13]:

$$D^2(\xi, \eta) = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))] = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta), \quad (9)$$

ahol  $M(\xi)$  és  $M(\eta)$  a  $\xi$  és az  $\eta$  valószínűségi változók várható értékei.

Érvényes a következő egyenlőség [13]:

$$D^2(\xi, \eta) \leq D(\xi)D(\eta). \quad (10)$$

Az egyenlőséget a  $D(\xi)D(\eta)$ -val osztva az

$$R(\xi, \eta) = \frac{D^2(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)} \quad (11)$$

kifejezést kapjuk, ami a két valószínűségi változó korrelációs együtthatója. Értéke:

$$|R(\xi, \eta)| \leq 1 \quad (12)$$

Az  $R(\xi, \eta) = 0$  a két változó korrelátlanságát jelenti. Minél közelebb van  $R(\xi, \eta)$  az 1-hez, általában annál szorosabb a kapcsolat a két változó között. Gauss-folyamatokra az  $R(\xi, \eta) = 0$  a statisztikai függetlenséget is jelenti.

## 2.3 Sztochasztikus folyamatok

Sztochasztikusnak nevezünk egy olyan folyamatot, amely egy  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  olyan időfüggvény csoporttal írható le, melyen belül mindegyik függvény egy-egy véletlen változó jel [15]. Tegyük fel hogy a vizsgált időfüggvényeknek  $t_i$  időpillanatokban rögzítjük az értékét, ezek rendre:

$$f_1(t_i), f_2(t_i), f_3(t_i), \dots, f_n(t_i). \quad (13)$$

Ha  $n$  elég nagy, képezhetjük az ezen pillanatokban vett amplitúdók statisztikai átlagát (sztochasztikus folyamat úgy fogható fel, mint időpontról időpontra változó sűrűségfüggvényű valószínűségi változó). Az olyan sztochasztikus folyamatot, amelyben ezen statisztikus jellemzők időben változatlanok, stacionáriusnak nevezzük [15]. Az olyan folyamatokat, melyekre az első sűrűségfüggvény (3) időfüggetlen, a második (8) pedig csak a megfigyelési időkülönbségtől függ :

$$p_1(x, t_a) = p_1(x), \quad (14)$$

$$p_2(x, t_a, x', t_b) = p_2(x, x', t_b - t_a), \quad (15)$$

gyengén stacionáriusnak nevezzük.

### Időbeli átlag

Legyen  $u(t)$  egy feszültségjel. A statisztikus átlagokhoz hasonlóan képezhetjük ezen időfüggvény különböző időpillanatokban felvett értékeinek az átlagát:

$$\langle u(t) \rangle_t = \lim_{t_a \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_a} \int_{-t_a}^{+t_a} u(t) dt, \quad (16)$$

ezt elsőrendű időátlagnak nevezzük [15].

Szemléletesen: a feszültségjel elsőrendű időátlaga az egyenfeszültségi komponenst adja meg. Ugyanakkor a másodrendű időátlag a jel átlagteljesítményét adja:

$$\langle u^2(t) \rangle_t = \lim_{t_a \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_a} \int_{-t_a}^{+t_a} u^2(t) dt. \quad (17)$$

Hasonlóan az előzőekhez a magasabbrendű átlagok itt sem rendelkeznek szemléletes tartalommal. Ha a változó komponens teljesítményére vagyunk kíváncsiak, az átlagteljesítmény és az egyenkomponens teljesítményének a különbségéből kaphatjuk meg [15]:

$$\langle (u(t) - \langle u(t) \rangle_t)^2 \rangle_t = \langle u^2(t) \rangle_t - (\langle u(t) \rangle_t)^2. \quad (18)$$

Visszatérve a sztochasztikus folyamatokra: a stacionaritás azt jelenti, hogy mindegy az, hogy először az időtengely mentén átlagolunk és ezután vesszük a statisztikus átlagot, vagy pedig fordítva. Azaz:

$$\langle M(f(t_j)) \rangle_t = M(\langle f_i(t) \rangle_t). \quad (19)$$

Ha a fentiekén kívül az is teljesül, hogy a statisztikus és az időátlagok megegyeznek egymással:

$$M(f(t_j)) = \langle f_i(t) \rangle_t, \quad (20)$$

akkor a folyamatot ergodikusnak nevezzük [15]. A gyakorlatban legtöbbször ez az eset fordul elő, mivel csak egyetlen jelből származik a véletlen folyamat oly módon, hogy a jelet időszakaszokra bontjuk, és ezeket tekintjük az egyes részfüggvényeknek. Ergodikus esetben tehát a jel időátlagai statisztikus átlagoknak tekinthetők (és fordítva). Emiatt az elsőrendű időátlag megegyezik az elsőrendű momentummal, azaz a jel egyenkomponense a várható értékkel, a másodrendű időátlag (azaz a jel teljesítménye) a másodrendű momentummal, a váltókomponens 1 ohmra vonatkoztatott átlagteljesítménye pedig a szórásnégyzettel [15].

Így tehát maga a szórás a váltókomponens effektív értékének felel meg. A stacionaritás és az ergodikusság is definiálható magasabb rendben, amennyiben a (13) egyenlőség az adott rendig teljesül, a továbbiakban elegendők a fent említett definíciók.

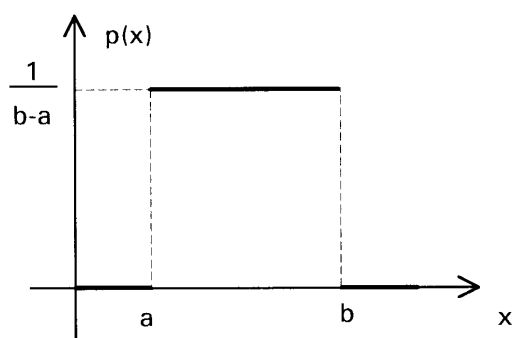
## 2.4 Valószínűségi eloszlások

Az alábbiakban a további vizsgálatok során felhasznált sűrűségfüggvények alakjait láthatjuk.

### Egyenletes eloszlás

Egy  $\xi$  valószínűségi változó egyenletes eloszlású az  $[a, b]$  intervallumon, ha:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \text{ ha } a < x < b \\ 0 & , \text{ egyébként} \end{cases} \quad (21)$$



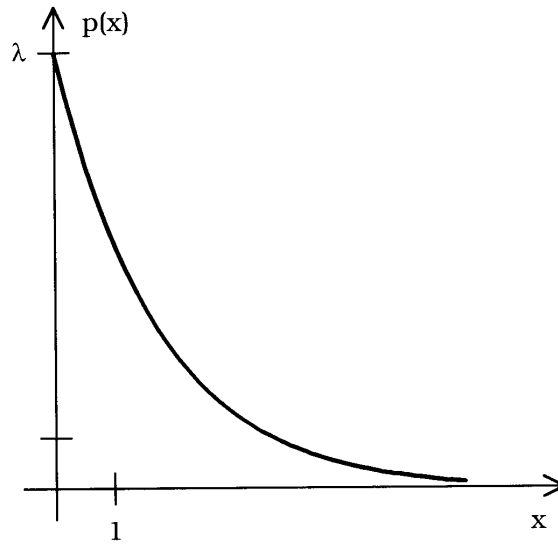
3. ábra; Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye

A várható értéke  $M(\xi) = \frac{(a+b)}{2}$  és a szórásnégyzete  $D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$  [16].

### Exponenciális eloszlás

A  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ ahol } \lambda > 0 \text{ valósszám} \\ 0 & , \text{ egyébként} \end{cases} \quad (22)$$



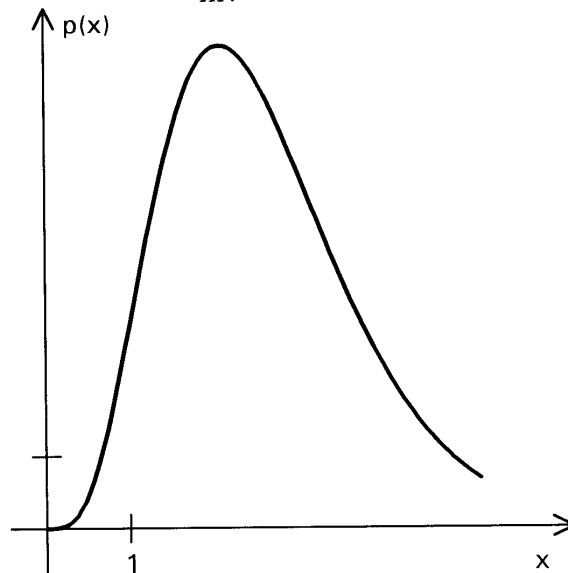
4. ábra; A exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye

A várható értéke  $1/\lambda$ , a szórásnégyzete  $1/\lambda^2$ .

### Poisson-eloszlás

Az  $a$  paraméterű Poisson-eloszlás sűrűségfüggvénye [16]:

$$p(x) = \frac{(a \cdot x)^m}{m!} e^{-ax}, \quad a, x > 0. \quad (23)$$



5. ábra; A Poisson-eloszlás sűrűségfüggvénye

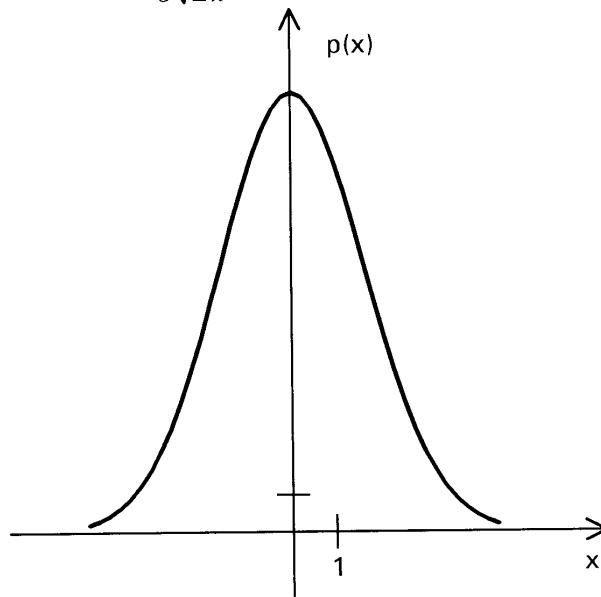
ahol a várható érték és a szórásnégyzet is egyenlő  $a$ -val.



### Normális eloszlás (Gauss-eloszlás)

Fizikai kísérletekben leggyakrabban előforduló eloszlás. Gyakoriságát a centrális határeloszlás tétel indokolja. A  $(\mu, \sigma)$  paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye [16]:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (24)$$



6. ábra; A normális eloszlás sűrűségfüggvénye

ahol  $\mu$  a várható érték,  $\sigma$  a szórás (ezenkívül az  $x = \mu$  helyen maximum, az  $x = \mu \pm \sigma$  helyeken inflexiós pontok vannak).

## 2.5 Statisztikai folyamatok spektrális analízise

Egy  $f(t)$  jel időbeli lefutásának (időbeli képe) amplitúdó statisztikájánál tovább is léphetünk. A Fourier-transzformáció alkalmazásával az időtartománybeli jelet a benne fellépő harmonikus komponensek amplitúdó- és fázisspektrumával írjuk le. Ezek a frekvenciatartománybeli képek ekvivalensek az időtartománybeli képekkel. Eszerint ha  $f(t)$  nem periodikus, véges energiájú jel, és

$$\int |f(t)| dt < \infty, \quad (25)$$

akkor

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{i2\pi f \cdot t} df, \quad (26)$$

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi f \cdot t} dt, \quad (27)$$

ahol tehát  $F(f)$  az  $f(t)$  jel Fourier-transzformáltja [15]. Más alakba átírva:

$$F(f) = A(f) e^{i\phi(f)}. \quad (28)$$

Az  $A(f)$  az  $f(t)$  amplitúdó spektruma,  $\phi(f)$  a fázis spektruma. (Az  $A(f)$  páros a  $\phi(f)$  páratlan függvény).

### A diszkrét Fourier-transzformáció

Az  $f(t)$  függvény helyett a számítógépes feldolgozásban véges számú adatsorral dolgozunk, ami  $N$  számú  $f(t_j)$  elemből áll. A spektrum kiszámítására ekkor a mintavételezett függvény alakjának figyelembe vételével a következő formulát kapjuk:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-i2\pi j \frac{k}{N}} \quad (29)$$

Itt tehát  $f(t_j)$  az  $f(j \cdot \Delta t)$  mennyiségnek felelnek meg, és  $F$  az úgynevezett diszkrét Fourier-transzformált,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Látható, hogy maga a transzformált is diszkrét, mivel az időtartomány véges hosszúságú. Az  $F_k = F(k \cdot \Delta f)$  formula lényegében a spektrum mintavételezését jelenti, ahol  $\Delta f = 1/N \cdot \Delta t$ .

A diszkrét Fourier-transzformált kiszámítása igen időigényesnek tűnhet, mivel az összes  $F$  komponens meghatározásához a formula szerint  $N^2$  komplex szorzásra van szükség. A komplex exponenciális függvény tulajdonságait kihasználva azonban a feladat megoldható  $N \cdot \log_2 N$  művelettel is, ami rendkívül nagy különbséget jelent nagy  $N$ -ek esetén. Ezt az eljárást Cooley és Tukey fejlesztette ki, és gyors Fourier-transzformáció (FFT) néven ismert [17]. A gyors Fourier-transzformáció a számítógépes jelfeldolgozás egyik alapvető eszköze.

### A teljesítménysűrűség-spektrum

Sok esetben elég, hogy egy fázis nélküli függvényt, a teljesítménysűrűség-spektrumot használjuk jellemzésre [18]. A jel energiájára van tehát szükségünk. Ha  $f(t)$  periodikus a jel energiája a (Parseval tétel néven ismert) következő kifejezés adja [15]:

$$E = \int |F(f)|^2 df, \quad (30)$$

$$|F(f)|^2 = |A(f)|^2. \quad (31)$$

Ha azonban  $f(t)$  nem periodikus és nem tűnik el a véges időtartományban, akkor vegyünk egy  $x(t)$  segédfüggvényt, amely

$f(t)$ -vel a  $[-t_0, t_0]$  időtartományban egyezik meg, egyébként pedig zérus. Az  $x(t)$  véges energiájú, felírhatóak a (26) és (27) összefüggések, és a segédjel energiáját a megfelelő (30) és (31) kifejezések adják. Az  $x(t)$  segédjel időtartama  $2t_0$ , ezzel az energiát osztva:

$$P|_{-t_0}^{+t_0} = \frac{1}{2t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df. \quad (32)$$

a  $2t_0$  alatti átlagteljesítményt kapjuk. Ha  $t_0 \rightarrow \infty \Rightarrow x(t) \rightarrow f(t)$ :

$$P = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int |x(f)|^2 df = \int \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} |x(f)|^2 df. \quad (33)$$

Az 
$$S(f) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} |x(f)|^2 \quad (34)$$

mennyiséget az  $f(t)$  jel teljesítménysűrűség-spektrumának nevezzük (valós, páros függvény) [15].

### Az autokorreláció függvény

Ha képezzük az egymástól  $\tau$  távolságra lévő  $f(t)$  függvényértékek szorzatának időátlagát (felhasználva az  $x(t)$  segédfüggvényt):

$$R(\tau) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{+t_0} x(t)x(t+\tau)dt = \langle f(t)f(t+\tau) \rangle_t \quad (35)$$

az  $f(t)$  jel autokorreláció függvényét kapjuk (valós, páros függvény) [15]. Értelmezése a következő: ha egy adott  $\tau_a$ -ban  $R(\tau_a) > 0$ , akkor az eredeti jelből az egymástól  $\tau_a$  távolságra levő pontok nagy átlagban azonos, ha  $R(\tau_a) < 0$ , akkor ellentétes előjelűek. Ha  $R(\tau_a) = 0$  akkor  $f(t)$  értékei annyiszor lehetnek ellentétesek mint azonos előjelűek, nincs korreláció közöttük, azaz függetlenek egymástól. Gauss-folyamatokra igaz a

fordított állítás is. Így ha  $R(t_a) = 0$  valamely  $\tau \geq \tau_b$ -től kezdve, akkor a  $\tau_b$ -nél nagyobb időkülönbségekre a jel jövőjére nézve jósolni nem lehet. Megemlítem még, hogy az  $R(\tau = 0)$  a jel átlagteljesítményét (egyben a szórásnégyzetét) adja. Az autokorreláció-függvényt és a teljesítménysűrűség-spektrumot a Wiener-Hincsin-tétel kapcsolja össze, amely szerint

$$R(\tau) = \int S(f) e^{i2\pi f \cdot \tau} df \quad (36)$$

a teljesítménysűrűség az autokorreláció-függvény Fourier-transzformáltja [15].

## 2.6 Fizikai zajtípusok osztályozása

A különféle típusú zajok egy lehetséges csoportosítását a teljesítménysűrűség-spektrumuk alapján adhatjuk meg. Ez a fajta csoportosítás a zajok idő tulajdonságait jellemzi.

### Fehérzaj

A konstans teljesítménysűrűség-spektrumú zajokat fehérzajnak nevezzük:

$$S(f) = \text{const.} \quad (37)$$

Ilyen alakban az energiáját kiszámítva, végtelennek adódik. A Wiener-Hincsin-tétel alapján az autokorrelációs függvénye a Dirac-féle  $\delta$  függvény, ami azt jelenti, nincs korreláció a jel értékei között. A reális fehérzajú jelek sávkorlátoltak. Fehérzajt mutat például egy  $R$  értékű ohmos ellenállás. Ezt a zajt termikus zajnak is nevezik,  $T$  hőmérsékleten  $S(f) = 4kTR$  a spektrum értéke, konstans, ahol  $k$  a Boltzmann-állandó [19].

### Az $1/f^2$ -zaj

Ha a teljesítménysűrűség-spektrum

$$S(f) = C \frac{1}{f^2}, \quad C = \text{konst.} \quad (38)$$

alakú, akkor  $1/f^2$ -zajról beszélünk. A fehér zajhoz hasonlóan ez is gyakori. Ez a következőkkel magyarázható: fizikai rendszerekben gyakori jelenség, hogy egyik mennyiség a másik integráljaként (vagy deriváltjaként) adódik. A Fourier-transzformáció

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n F(f) \quad (39)$$

tulajdonsága miatt a fehér zaj (időbeli) integráljaként adódó zaj  $1/f^2$ , az  $1/f^2$  zaj deriváltjaként adódó zaj pedig fehér spektrumú.  $1/f^2$  zajt mutat például egy Brown-mozgást végző részecske helykoordinátája [20].

### Az $1/f$ zaj

A természetben a legkülönfélébb területeken előforduló zajtípus. Megtalálható a félvezető eszközökben, a biológiai rendszerekben is. Ide az  $\frac{1}{f^\alpha}$ , ahol  $\alpha \approx 1$  spektrumú zajok tartoznak. A szigorúan  $\alpha = 1$  kitevőjű jel végtelen energiájú, reális esetben sávkorlátozottnak kell lennie. Az alsó határfrekvencia meghatározhatósága a mérések véges időtartama miatt korlátozott. Félvezető eszközökre  $10^{-6}$  Hz frekvenciáig kimutatható az  $1/f$  függés. Egyes esetekben ez az alsó határfrekvencia  $10^{-10}$  Hz, ami 300 éves ciklusoknak felel meg [21].

### Lorentzi zajok

Az exponenciális lecsengésű autokorreláció-függvénnyel rendelkező zajok teljesítménysűrűség-spektruma a Wiener-Hincsin-tételből adódóan Lorentzi:

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \leftrightarrow S(f) = C \cdot \frac{\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2}. \quad (40)$$

Belátható, hogy a Poisson-folyamatokra ezek a kifejezések fennállnak [22]. Ha egymástól független Poisson-folyamatokat összegzünk, a  $\tau_0$  értékekre pedig  $g(\tau) = 1/\tau$  eloszlást feltételezünk, sávkorlátolt  $1/f$  zajt kapunk [23].

## 2.7 A zajtípusok előállításának algoritmusai

A valóságban szinte mindenhol, a legkülönfélébb módon és mennyiségben előforduló zajokat a számítógépes szimulációban mesterségesen kell előállítani. Számos módszer ismert, de mindenféleképpen alapvető statisztikai kritériumoknak kell megfelelniük. Az sem mellékes, hogy a gépi számításra minél alkalmasabbak legyenek, ezáltal biztosítva a gyorsabb és hatékonyabb eljárások megvalósítását.

### Egyenletes eloszlású számok előállítása

Az egyenletes eloszlású számokat egy egyenletes eloszlású számokat adó véletlenszám-generátorral állíthatjuk elő. Az úgynevezett additív véletlenszám-generátor definíciója a következő [24]:

$$r_i = (r_{i-24} + r_{i-55}) \bmod M \quad (41)$$

ahol  $r_i$  jelenti a generált számokat,  $M$  pedig egy alkalmasan választott nagy szám, lehetőleg a gép szóhosszának megfelelően.

### Normális (Gauss-) eloszlású számok előállítása

A Gauss-eloszlású számokat az egyenletes eloszlású  $r_j$  számokból lehet képezni a következő algoritmus felhasználásával [25]:

1. Legyen  $u = r_j / M$ ,  $q = \sqrt{8/e} \cdot \left( r_{j+1} - \frac{1}{2} \right) / u$ ,  $v = q^2$
2. Vizsgáljuk meg, hogy  $v$  nagyobb-e mint  $-4 \cdot \log(u)$ , ha igen térjünk vissza az 1. pontra, ha  $v < -4 \cdot \log(u)$ , akkor a keresett véletlen szám  $q$ .

Megjegyzem, hogy Gauss-eloszlású véletlenszámokat a centrális határeloszlás tétel felhasználásával is előállíthatunk, ha összegezzünk független egyenletes eloszlású számokat [26]. A fenti algoritmus azonban kedvezőbb a számítási sebesség és pontosság szempontjából.

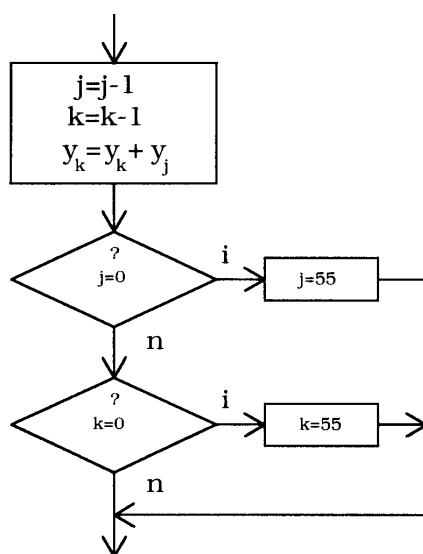


### Lorentzi spektrumú számok előállítása

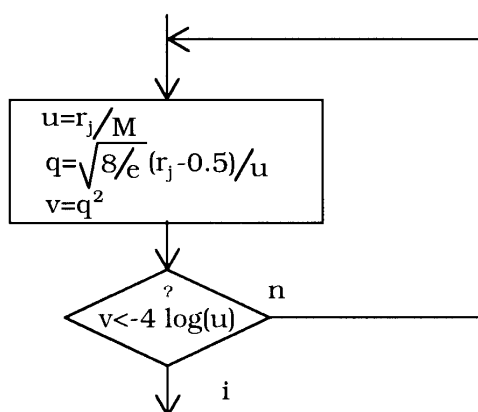
A Lorentzi eloszlású számokat a  $g_j$  normális eloszlású számok felhasználásával kaphatjuk a következő algoritmus alapján [24]:

$$\lambda_{j+1} = C \cdot \lambda_j + g_j, \quad 0 < C < 1 \quad (42)$$

A fent leírt eljárások igen alkalmasak számítógépes megvalósításra mivel viszonylag könnyen programozhatóak és gyorsan számíthatóak. Ezen kívül kellőképpen tesztelték és minden szükséges próbát kiállták.



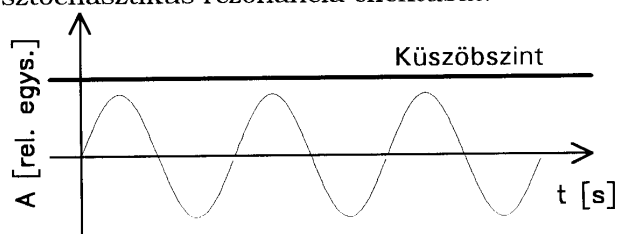
7. ábra; Az additív véletlenszám-generátor algoritmus



8. ábra; Normális eloszlású számokat előállító algoritmus

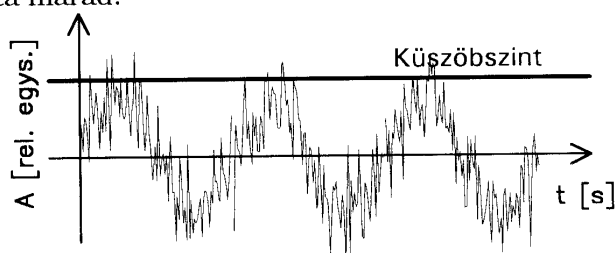
### 3. A sztochasztikus rezonanciát mutató szintmetszési modell általános leírása

A bevezetőben említett egyszerű modell leírására kerül itt sor. A modellel kapcsolatban megemlítem, hogy aligha lehet ennél egyszerűbbet felállítani, hiszen csak egy küszöbszintre és a jelhez kevert zajra van szükség, mégis nagyon jól mutatja a szintmetszésen alapuló nemdinamikai sztochasztikus rezonancia effektusát.



9. ábra; Szinuszos jel a küszöbszint alatt

Tehát ezek alapján választottam egy tetszőleges küszöbszintnél kisebb amplitúdójú szinusz hullámot, úgy ahogy azt a 9.ábra mutatja. Ebben az esetben a jel nem metszi sehol sem a küszöbszintet, mindvégig alatta marad.

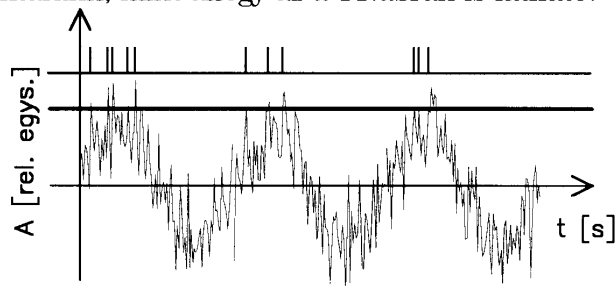


10. ábra; Szinuszos jel zajjal keverve

Következő lépésként ehhez a küszöbszint alatt elhelyezkedő jelhez hozzákeverünk meghatározott típusú zaj fajtát. Ahogyan az majd az elmélet leírásánál is látható lesz az elméleti görbék meghatározásához a zajok eloszlásának típusát ismernünk kell. A 10.ábrán látható, a jel "zajossá" vált. A zaj amplitúdó változtatásával elérhető, hogy a

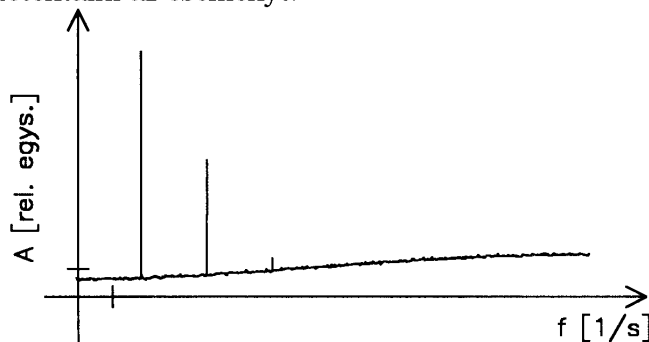
küszöbszintet átlépje a zajos jel, így impulzusok jelennek meg a kimeneten.

Amikor még kicsi a zaj szórása, akkor ritkán fordul elő olyan eset amikor a jel és a zajszint összege meghaladja a küszöbszintet. Ezért nagy lesz a bizonytalansága, és kicsike az értéke a kimenő jel amplitúdó négyzetének. Növelve a zaj szórását egyre gyakrabban fordulnak elő szintmetszési esetek. Minden egyes szintmetszéskor, amikor a jel és a zaj összege alulról metszi át a küszöbszintet válaszként egy keskeny impulzust detektálunk, mint ahogy az a *11. ábrán* is látható.



*11. ábra;* A szintmetszéskor keletkezett tüskék

Ez a modell antiszimmetrikusnak mondható mert csak egy küszöbszinttel rendelkezik és további egyszerűségét mutatja, hogy szintmetszéskor nem négyszögjelet kapunk hanem elegendő egy impulzussal detektálni az eseményt.

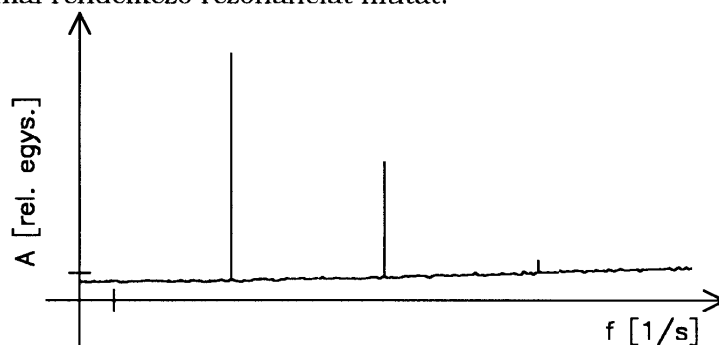


*12. ábra;* A túsorosozat spektruma

Az előzőek szerint kapott túsorosozat Fourier transzformáltjának segítségével kapjuk a *12. ábrán* látható spektrumot. A spektrum

tartalmazni fogja a periodikus jel frekvenciájához tartozó amplitúdóról szóló információt, és ezen a helyen megfelelő zaj amplitúdó esetén nagy értéket kapunk. A zaj amplitúdóját egy tartományon keresztül változtatjuk és keressük a maximális értéket. A sztochasztikus rezonanciát ennél az értéknél figyelhetjük meg. Természetesen a felharmonikusok is megjelennek.

Ennek a dolgozatnak külön érdekessége a második felharmonikus általam elvégzett vizsgálata, amely eddig nem tapasztalt érdekes két maximummal rendelkező rezonanciát mutat.



13. ábra; A túsorosozat spektrumának nagyított részlete

A mellékelt 13.ábrán a spektrum egy kinagyított részletét tanulmányozhatjuk. Látszik hogy valóban nagyon éles csúcsok találhatóak az általam vizsgált frekvenciánál illetve a felharmonikusok is igen dominánsan jelen vannak a háttérzaj fölé emelkedve.

## 4. A szintmetszési modell jellemzőinek kiszámítása

### 4.1. A modell elméleti alapjainak ismertetése

A következőkben a szintmetszésen alapuló nemdinamikai sztochasztikus rezonancia elmetét fogom ismertetni.

Induljunk ki először is abból, hogy frekvencia moduláció nélkül, elegendően rövid pulzusok esetén, a folyamatot jellemző feszültség  $U_{av}$  arányos az átlagos pulzus ismétlődési számmal,  $\nu$ -vel [11,27]. Tehát:

$$U_{av} = \langle u(t) \rangle_t = \nu \cdot A \cdot \tau_0 \quad (43)$$

ahol:  $A$ , a pulzus amplitúdója

$\tau_0$ , a pulzus időtartama

A  $\nu$  kicsi és lassú modulációja esetén időátlagban lineáris modulációt jelent az  $U_{av}^*$ -ra nézve, akkor ha rövid ideig mérjük ( sokkal rövidebb ideig mint a moduláció frekvenciája ), tehát:

$$U_{av}^*(t) = \nu(t) \cdot A \cdot \tau_0 \quad (44)$$

szinuszos moduláció esetén a Fourier spektrumban megjelenik ennek a komponense, és független a moduláció frekvenciájától abban az esetben, ha teljesül az  $f_0 \ll \nu(t)$ . Ez a feltétel a hatékony modulált jelátvitelhez fontos.

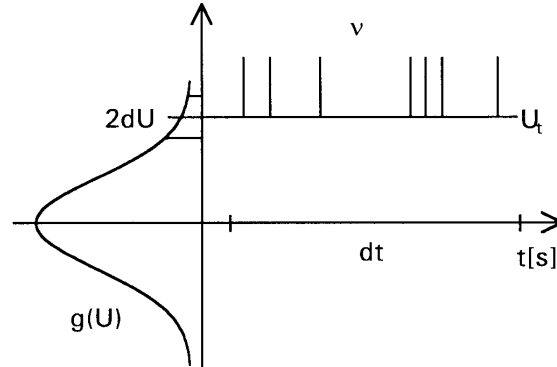
Moduláció nélkül a spektrum a következő:

$$S_{no}(f) = \nu \cdot A^2 \cdot \tau_0^2 \quad (45)$$

A következőkben Gauss eloszlású zajt tételezzünk fel. Az  $U_t$  küszöbszint környezetében, valamint a szintet metsző pulzusok számát figyelve az idő függvényében, felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$$2 \cdot g(U_t) \partial U = \nu(U_t) \partial t \quad (46)$$

ahol:  $g(U_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{U_t^2}{2\sigma^2}\right]$  a zaj amplitúdó kifejezése. (14.ábra)



14. ábra;

Behelyettesítéssel és figyelembe véve hogy a  $\frac{\partial U}{\partial t}$  helyébe a  $\sqrt{\int_0^{\infty} f^2 S(f) df}$

írható kapjuk a következőt :

$$v(t) = \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{(U_t - B \cdot \sin(\omega t))^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \sqrt{\int_0^{\infty} f^2 S(f) df} \quad (47)$$

ahol  $x(t) = B \cdot \sin(\omega t)$  jelenti a modulációt.

A modulációt kicsinek feltételezve a  $v(t)$ -t Taylor sorba fejthetjük és kapjuk a különböző rendű közelítéseket. A további felhasználás céljából álljanak itt a következő összefüggések:

$$P_s = |U_{av}^*|^2 \quad (48)$$

$$v_0 = \frac{1}{\sigma} \cdot \sqrt{\int_0^{\infty} f^2 S(f) df} \quad (49)$$

$$v(x) = v_0 \cdot \exp\left[-\frac{(U_t - x)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (50)$$

valamint a Taylor sor és a Fourier transzformáció ismert alakjai:

$$T_n(v(x))\Big|_{x=x'} = \sum_{m=0}^n \frac{v^{(m)}(x')}{m!} \cdot (x-x')^m \quad (51)$$

$$F\left(T_n(v(x))\Big|_{x=x'}\right)\Big|_{\omega=\omega'} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} T_n(v(x))\Big|_{x=x'} \cdot e^{-i\omega' t} dt \quad (52)$$

továbbá ezek felhasználásával nyert:

$$\left. \overline{P_s} \right|_{\omega=\omega'}^{x=x'} = \left| A \cdot \tau_0 \cdot F\left(T_n(v(x))\Big|_{x=x'}\right)\Big|_{\omega=\omega'} \right|^2 \quad (53)$$

$$S_{no} = v(x)\Big|_{x=0} \cdot A^2 \cdot \tau_0^2 = v_0 \cdot A^2 \cdot \tau_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{U_t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (54)$$

$$\left. SNR \right|_{\omega=\omega'}^{x=x'} = \frac{\left. \overline{P_s} \right|_{\omega=\omega'}^{x=x'}}{S_{no}} = \frac{1}{v_0 \cdot A^2 \cdot \tau_0^2} \left. \overline{P_s} \right|_{\omega=\omega'}^{x=x'} \exp\left(\frac{U_t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (55)$$

ahol a jelöléseknek a következő jelentésük van:

$P_s$ : a kimenőjel amplitúdó négyzete

$U_{av}^*(t)$ : a kimenőjel feszültségének időátlaga

$v(t)$ : a pulzusok frekvenciája

$A$ : a pulzus amplitúdója

$\tau_0$ : a pulzus időtartama

$\sigma$ : a zaj szórása

$U_t$ : a küszöbszint feszültség nagysága

$B$ : a jel amplitúdója

$\omega$ : a jel körfrekvenciája

$t$ : az idő

$f$ : a spektrum frekvenciája

$S(f)$ : a zaj teljesítmény-sűrűség spektruma

$S_{no}$ : a frekvencia-moduláció nélküli spektrum

$SNR$ : a jel/zaj viszony

Ezeknek az ismereteknek a felhasználásával kapjuk a következő közelítő formulákat. A sorfejtést első rendig elvégezve kapjuk:

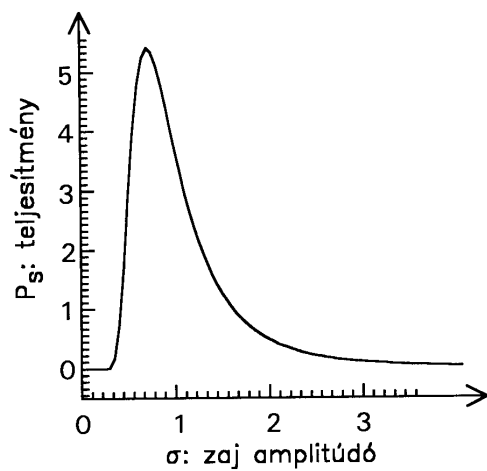
$$\begin{aligned} T_1(v(x))\Big|_{x=0} &= v_0 \left( 1 + \frac{U_t \cdot X}{\sigma^2} \right) \cdot \exp\left( -\frac{U_t^2}{2\sigma^2} \right) = \\ &= v_0 \left( 1 + \frac{U_t \cdot B}{\sigma^2} \cdot \sin(\omega t) \right) \cdot \exp\left( -\frac{U_t^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

A kimenőjel amplitúdó négyzetére az  $\omega_0$ -nál kapjuk a következőt:

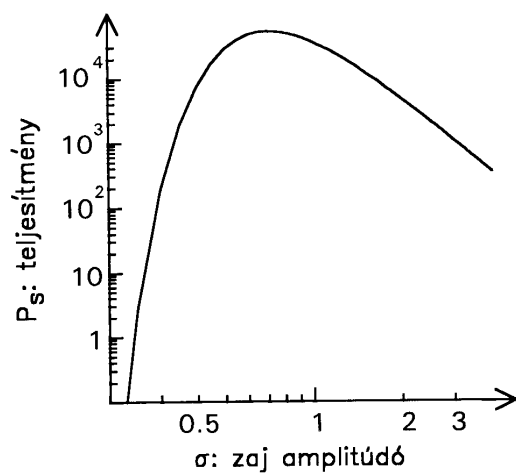
$$\boxed{\left. \frac{1}{P_s} \right|_{\omega=\omega_0}^{x=0} = \left( \frac{v_0 \cdot A \cdot \tau_0 \cdot U_t \cdot B}{\sigma^2} \right)^2 \cdot \exp\left[ -\left( \frac{U_t}{\sigma} \right)^2 \right]} \quad (57)$$

Tehát elméleti összefüggést kaptunk az alapharmonikusnál a kimenő jel teljesítményére és az (55) összefüggés felhasználásával a jel/zaj viszonyra. A függvény vizsgálatával megállapíthatjuk, hogy egy bizonyos zaj amplitúdó értéknél maximummal rendelkezik, ezt a helyet nevezzük a zaj optimális értékének. Ezt a görbét láthatjuk a 15. *ábrán* lineáris, a 16. *ábrán* pedig logaritmikus tengelyekkel ábrázolva.





15. ábra; Az alapharmonikus elméleti görbéje



16. ábra; Az alapharmonikus elméleti görbéje

## 4.2. Új elméleti eredmények

Ha a sorfejtésben magasabb rendig elmegyek, akkor egyrészt pontosabb összefüggésekhez jutok, másrészt pedig ami ebben az esetben a célom volt, meg tudom vizsgálni a felharmonikusoknál a kimenő teljesítmény, valamint a jel/zaj viszony alakulását.

A sorfejtést második rendig elvégezve kapom:

$$\begin{aligned} T_2(v(x)) \Big|_{x=0} &= v_0 \left( 1 + \frac{U_t \cdot x}{\sigma^2} - \frac{(\sigma^2 - U_t^2) \cdot x^2}{2\sigma^4} \right) \cdot \exp\left(-\frac{U_t^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= v_0 \left( 1 + \frac{U_t B}{\sigma^2} \cdot \sin(\omega t) - \frac{(\sigma^2 - U_t^2) B^2}{2\sigma^4} \cdot \sin^2(\omega t) \right) \cdot \exp\left(-\frac{U_t^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (58)$$

A kimenőjel amplitúdó négyzetére az  $\omega_0$ -nál, kapom a következőt:

$$\left. \frac{2}{P_s} \right|_{\omega=\omega_0}^{x=0} = \left( \frac{v_0 \cdot A \cdot \tau_0 \cdot U_t \cdot B}{\sigma^2} \right)^2 \cdot \exp\left[-\left(\frac{U_t}{\sigma}\right)^2\right] \quad (59)$$

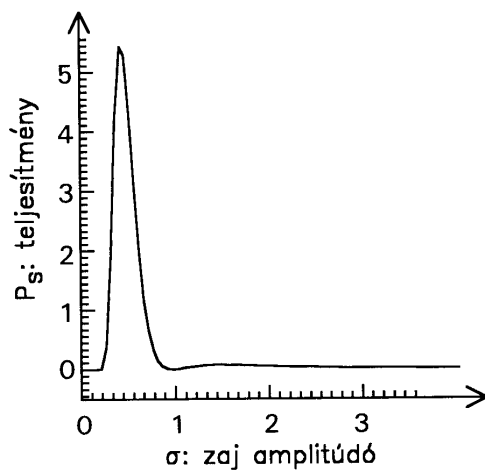
Ez az eredmény teljes mértékben megegyezik az első rendig elvégzett sorfejtésből adódó (57)-es képlettel.

A kimenőjel amplitúdó négyzetére a  $2\omega_0$ -nál, vagyis az első felharmonikusnál kapom a következő eredményt:

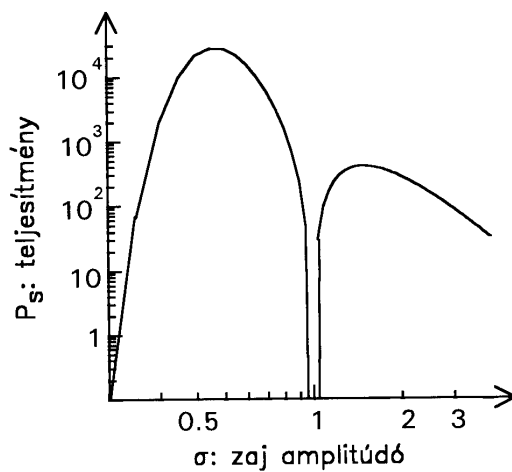
$$\boxed{\left. \frac{2}{P_s} \right|_{\omega=2\omega_0}^{x=0} = \left( \frac{v_0 \cdot A \cdot \tau_0 \cdot (\sigma^2 - U_t^2) \cdot B^2}{4\sigma^4} \right)^2 \cdot \exp\left[-\left(\frac{U_t}{\sigma}\right)^2\right]} \quad (60)$$

Tehát ezzel új elméleti összefüggést kaptam a második harmonikus frekvenciájánál a kimenő jel teljesítményére. Ezt a függvényt megvizsgálva láthatjuk hogy két lokális maximummal rendelkezik. Sikerült kimutatnom egy új jelenséget, nevezetesen a két maximummal rendelkező rezonanciát. A két maximum között majdnem két nagyságrend különbség van. Ezt láthatjuk a 2. ábrán log-log tengelyekkel

ábrázolva. További érdekességként felhívom a figyelmet a két maximum között elhelyezkedő éles minimumra. Ebből az látszik, hogy amikor a zaj amplitúdó a küszöbszint nagyságát eléri, a rendszer ezen a frekvencián csak háttérzajjal rendelkezik.



17. ábra; Az első felharmonikus elméleti görbéje



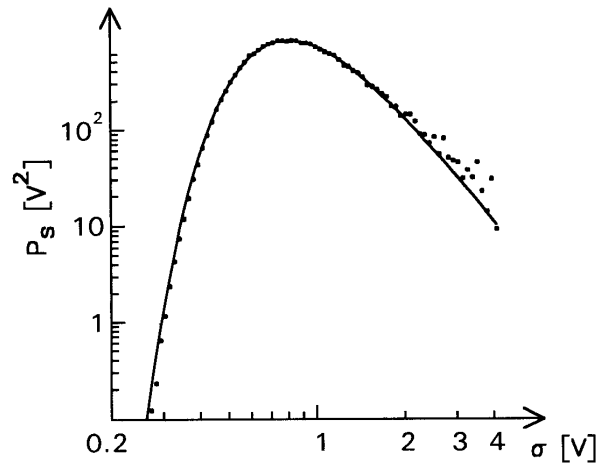
18. ábra; Az első felharmonikus elméleti görbéje

## 5. A szintmetszési modellel végzett numerikus eredmények feldolgozása

Ebben a fejezetben a szintmetszésen alapuló nemdinamikai sztochasztikus rezonanciát mutató modellre vonatkozó numerikus eredményeket fogom közölni. A numerikus modellezés segítségével kapott eredményeket össze tudom hasonlítani az elméleti eredményekkel és meg tudom állapítani helyességüket. A szimuláció arra is alkalmas, hogy könnyűszerrel tanulmányozzam a rendszer viselkedését olyan tartományokban ahol az elmélet már nem érvényes.

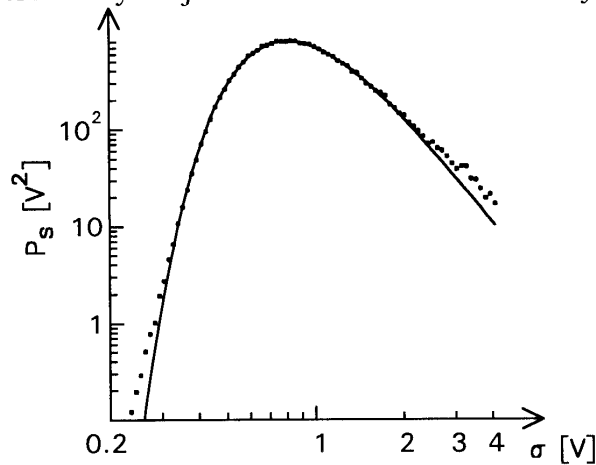
### 5.1 A normális eloszlású fehér zaj esetén kapott eredmények

A számítógépes modellezésben használt szinusz jel amplitúdóját kicsinek választottam, hogy minél jobban megfeleljen az elméleti részben leírt feltételeknek. Ez azzal jár, hogy viszonylag kevés alkalommal fordul elő szintmetszési eset. A szintmetszések gyakoriságát csak nagyobb ismétlési számmal tudom növelni. A tisztább, kisebb szórással rendelkező eredményekhez is az átlagolások számának növelésével tudok eljutni. Az *19.ábrán* normális eloszlású zaj felhasználásával kapott eredmény látható. Az alapharmonikusnál tehát egy maximummal rendelkező görbét kapunk. Mivel az alapharmonikus viszonylag dominánsan van jelen a spektrumban ezért kis jel amplitúdó esetén is viszonylag kis szórással rendelkező képet kapunk eredményül. A kimenő jel értékéből le kell vonni a háttér zajértékét. Ezt az adott frekvencia körüli értékek átlagából számíthatjuk. Célszerűbbnek találtam azonban, tisztán csak a zaj spektrumát kiszámolni. Ezt úgy lehet megoldani, hogy periódikus gerjesztés nélkül vizsgáljuk a kimenetet. Ha így járunk el, akkor nem szükséges a zajjal kevert jel spektrumából a vizsgált frekvencia körüli értékek átlagolásával



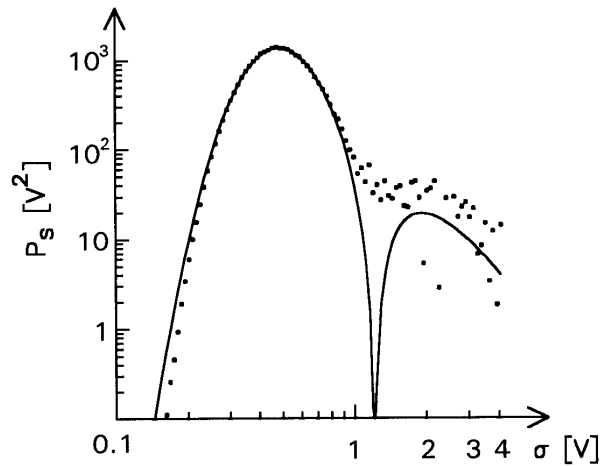
19. ábra;

számítani a háttérzajt, ugyanis rendelkezésünkre áll egy tisztán a zajos válasz spektrumából kapott háttér. Ez jobban leírja a zaj hatását mint az átlagolással előállított értékek. A 20. ábrán láthatjuk, hogy ha így teszünk jobb eredményhez jutunk. Ezzel a módszerrel lényegesen



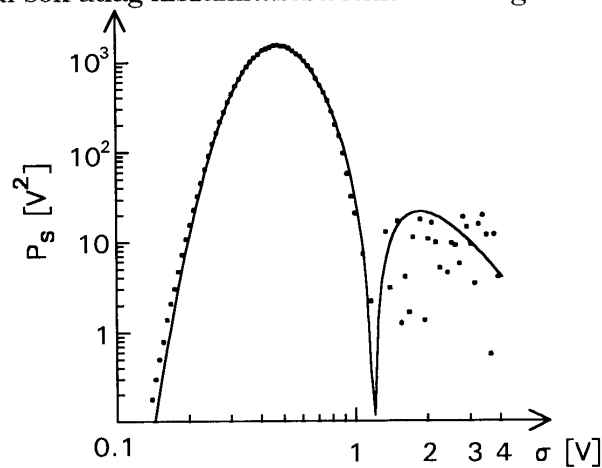
20. ábra;

kisebb a szórás, mint az előző előállítási mód esetében. Ennek különösen az érdekes viselkedést mutató második harmonikus vizsgálatánál vesszük hasznát, ahol a modellezett görbében több nagyságrendnyi eltérés található a két jellegzetes helyi maximumok között. Ugyanis amint az a 21. ábrán látható egy igencsak domináns lyuk található a két maximum között és a zaj szórása miatt a



21. ábra;

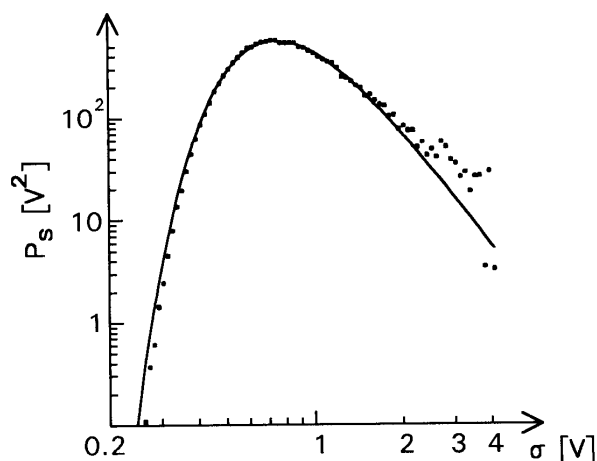
modellezéssel kapott eredmény nem tudja teljes mértékben követni az elméleti görbét. Azonban a jel nélküli spektrumot kivonva a zajjal kevert jel spektrumából a 22. ábra tanúsága szerint lényegesen jobb eredményt tudunk elérni mint ha csak pusztán a vizsgált frekvencia környékén elhelyezkedő értékekből számolnánk a háttérrel. Ilyen érdekes két maximummal rendelkező rezonanciát még eddig nem közöltek az irodalomban. A kimutatása azért nehéz, mert a nagy amplitúdójú zaj tartományában a szórás olyan nagy mértékben megnő, hogy reménytelenül sok átlag kiszámítására lenne szükség a leszorításához.



22. ábra;

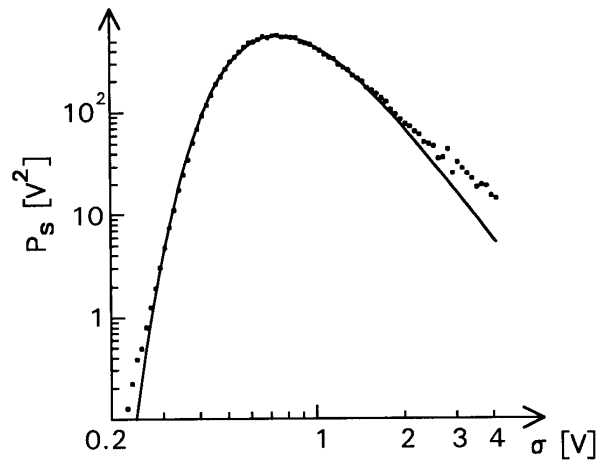
## 5.2 A Lorentzi zaj felhasználásával nyert eredmények

A nagy szórású zaj csökkentése végett kipróbáltam, hogy más típusú zaj esetén hogyan viselkedik a rendszer. Ehhez Lorentzi zajt használtam és vizsgáltam az első harmonikusnál a rezonanciát. Tulajdonképpen ebben az esetben csak a zaj spektruma változott meg, eloszlása nem. Nagyon hasonló eredmény született, mint a normális eloszlású fehér zaj esetén. Ezt láthatjuk a *23.ábrán*.



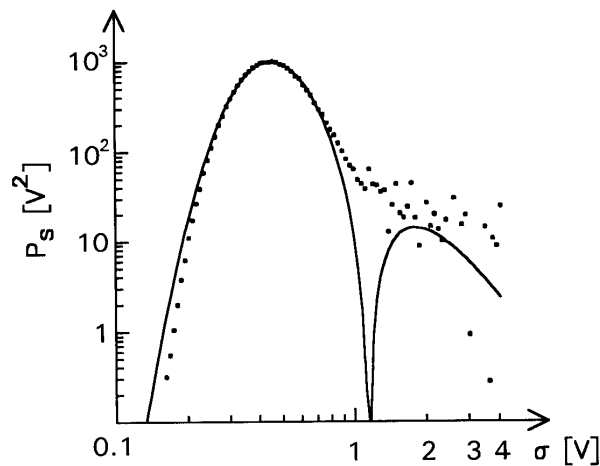
23. ábra;

Kipróbáltam a szinusz nélküli kimeneti zaj spektrumának a levonását ebben az esetben is. A *24.ábrán* látható, akárcsak az előző esetben, hogy javulás tapasztalható. Azt is láthatjuk, hogy a zaj színe nincsen hatással a kimenő jel szórására nézve. Az elméleti megközelítésben sem lett kihasználva a zajok spektrális tulajdonsága csak az eloszlása. Márpedig a Lorentzi zaj normális eloszlást követ. Ezzel tudjuk magyarázni a hasonlóságot.



24. ábra;

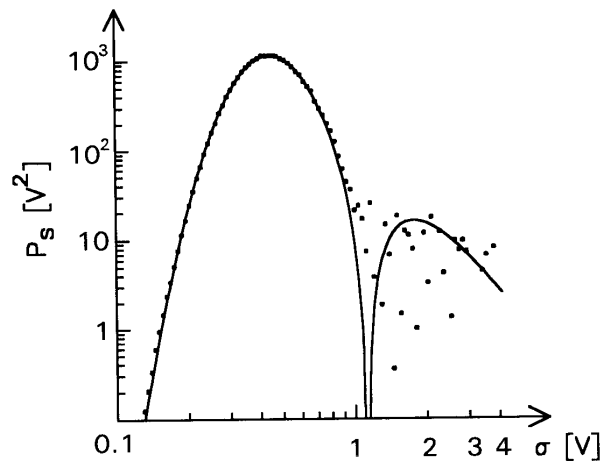
A második felharmonikus is szinte teljesen megegyező képet mutat az előző részben bemutatott fehér zaj esetén látottal. Itt is a lyukat úgymond elfedi a zaj, mert az amplitúdó ebben a tartományban növekszik a küszöbszint fölé 25.ábra.



25. ábra;

Az említett modell finomítással a 26.ábrán láthatóan csökkenteni tudtam a zaj szórását. Ezáltal jobban megközelítette a modellezés eredménye az elméletit. További javítás céljából a modellen más jellegű változtatásokat is meg lehet valósítani. A zaj színének változtatásával nem várható lényeges javulás az illeszkedést illetően.





26. ábra;

A modellezésben az első felharmonikus vizsgálatánál a bemenő determinisztikus jel amplitúdóját kicsinek választottam. Az elmélet is ilyen esetekre korrekt. A második harmonikus vizsgálatánál viszont valamivel nagyobb amplitúdójú bemenő szinuszos jelet kellett alkalmazni azért, hogy a kimeneten megfelelő nagyságú jelet kapjak a felharmonikus frekvenciájánál. A minták száma  $10^4$ -és nagyságrendű volt. Ezekkel a paraméterekkel kaptam az elméletivel jó egyezést mutató eredményeket. A nagyobb zajamplitúdó környékén tovább lehetne csökkenteni a szórást, ha megnövelném a minták átlagának számát, de ez viszont a számítógépes megvalósításban az időtényező jelentős növekedésével járna.

## 6. Az eredmények diszkussziója

A dolgozatban ismertettem egy újonnan felfedezett, nemdinamikai, szintmetszéken alapuló sztochasztikus rezonancia modellt. A rendszer felépítésére vonatkozó elméleti számításokat és numerikus modellezést végeztem.

Célul tűztem ki a szintmetszéken alapuló sztochasztikus rezonancia jelenségének vizsgálatát. A cél elérése érdekében egy nagyon egyszerű modellt választottam, ami viszont tökéletesen megfelel arra, hogy tanulmányozzuk a sztochasztikus rezonancia minden lényeges tulajdonságát. Analitikus számításokkal meghatároztam a harmonikusok amplitúdóját normális eloszlású zajok esetére. Numerikus modellezést végeztem különböző színű zajokkal az analitikus úton nyert formulák igazolására

A numerikus és analitikus eredmények összhangban vannak egymással, és a helyi laboratóriumban analóg eszközökkel végzett kísérletekkel. A számítógépes szimulációval végzett kísérletek segítségével az elméletben használt feltételeken túllépve is tudtam a jelenséget tanulmányozni.

Újdonságnak számító eredményeim a szintmetszéken alapuló sztochasztikus rezonancia első felharmonikusának vizsgálatánál adódtak. A vizsgálatokat különböző színű zajokkal végeztem és megfigyeltem, hogy az illeszkedés Lorentzi típusú zajok esetén is igen jó. Analitikus formulát vezettem le a kimenő jel amplitúdó négyzetére és jel/zaj viszonyára. Igen fontos és érdekes eredmények a két maximummal rendelkező görbék, amelyek eddig ismeretlenek a sztochasztikus rezonancia irodalmában.

A modell többféle továbbfejlesztési lehetőséget is magában hordoz. Az egyik ilyen lehetőség, hogy a modell felépítésének megváltoztatásával a rendszer szimmetrikus legyen. Ezáltal növelhető a jel/zaj viszony értéke az alapharmonikusnál. Egy másik lehetőség a detektált válaszjelek alakjának különböző módon való definiálása. Elképzelhető különböző alakú determinisztikus bemenő jelek alkalmazása is.

## Irodalom

1. Noise in Systems Showing Stochastic Resonance  
László B. Kiss, Zoltán Gingl, Zsuzsanna Márton, János Kertész, Frank Moss, Gabor Schmera, and Adi Bulsara  
*Journal of Statistical Physics, Vol. 70, Nos. 1/2, 1993*
2. F. Moss, in "An Introduction to Some Contemporary Problems in Statistical Physics", ed. G. Weiss (SIAM, Philadelphia 1994)
3. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou and F. Moss,  
*Nature* **365** (1993) 337-340
4. Bulsara, E. Jacobs, T. Zhou, F. Moss and L. B. Kiss,  
*J. Theor. Biol.* **152** (1991) 531
5. K. Habiger, H. Risken, M. James, F. Moss and W. Schleich,  
*Phys. Rev. A* **41**, 3950 (1990)
6. Stochastic Resonance: From the Ice Ages to the Monkey's Ear  
Frank Moss  
*Dep. of Physics, Univ. of Missouri at St. Louis, MO 63121, USA*
7. (a) N. G. Van Kampen,  
*Stochastic Processes in Physics and Chemistry*  
(North-Holland, Amsterdam, 1981)  
(b) W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise Induced Transitions, Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*  
(Springer-Verlag, Berlin, 1984)
8. P. Hänggi, P. Talkner and M. Borkovec,  
*Rev. Mod. Phys.* **62**, 251 (1990)

9. (a) K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames and F. Moss,  
"Stochastic Resonance on a Circle", Phys. Rev. Lett., in press
- (b) P. Jung, Phys. Rev. E, to be published
- (c) A. R. Bulsara, S. B. Lowen and C. D. Rees,  
Phys. Rev. E, to be published
10. (a) F. Moss, a review in:  
Intern. J. Bifurcations and Chaos, to be published
- (b) F. Moss,  
Okawville International Workshop on Stochastic Resonance  
(USA, IL, 1993), unpublished
- (c) R. F. Fox, R. Roy and G. Vemuri, unpublished
11. Z. Gingl, L. B. Kiss and F. Moss, " Nondynamical Stochastic  
Resonance ", invited talk at International Conference On "  
Fluctuations in Physics and Biology... ", Elba (Italy), June 1994
12. Prékopa András: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1980
13. Dr. Fekete István: Matematika és számítástechnika  
Akadémiai Kiadó, Budapest 1986
14. Csáki Frigyes: Szabályozások dinamikája  
Akadémiai Kiadó, Budapest 1974
15. Dr. Ferenci Pál: Hírközléelmélet  
Tankönyvkiadó, Budapest 1974
16. S. Karlin, H. M. Taylor: Sztochasztikus folyamatok  
Gondolat Kiadó, Budapest 1985
17. J..W.Cooley and J.W.Tukey  
Math. Comp. 19, 1965
18. Norbert Hesselmann: Digitális jelfeldolgozás  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1985

19. Motchenbacher-Fitchen: Kis-zajú elektronikus áramkörök tervezése  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1977.
20. Nelson Max: Noise and stochastic processes  
Dover Publications, New York 1954
21. Marvin S Keshner: 1/f noise Processes of the IEEE,  
Vol.70, No. 3, March 1982
22. Fazlollah M. Reza: Bevezetés az információ elméletbe  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966
23. Dr. Kiss László Béla: Kézirat
24. D.E.Knuth: A számítógépprogramozás művészete  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1987
25. A.J.Kinderman and J.F.Monach  
ACM Trans. Math. Software, 3, 257; 1977
26. I.M.Szobol: A Monte Carlo módszerek alapjai  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1981
27. Z. Gingl, L. B. Kiss and F. Moss, " Nondynamical Stochastic  
Resonance - Theory and Arbitrarily Coloured Noise ", accepted to  
Euro Physics Letters