

**SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
KÍSÉRLETI FIZIKAI TANSZÉK**

# **Sztochasztikus rezonancia numerikus modellezése**

**Szakdolgozat**

**Készítette: Lakatos Zoltán  
Témavezető: Dr. Gingl Zoltán**

**2000.**

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés .....</b>	<b>3</b>
<b>2. Sztochasztikus jelek leírása .....</b>	<b>5</b>
<b>3. A jelenség alapjai .....</b>	<b>10</b>
<b>4. Történeti áttekintés.....</b>	<b>15</b>
<b>5. Wiesenfeld és McNamara adiabatikus elmélete .....</b>	<b>17</b>
<b>6. A modellezés matematikai háttéréről .....</b>	<b>20</b>
<i>6.1. Markov-folyamatok.....</i>	<i>20</i>
<i>6.2. A Wiener-folyamat .....</i>	<i>23</i>
<i>6.3. A fehér zaj.....</i>	<i>24</i>
<i>6.4. Sztochasztikus integrálok.....</i>	<i>25</i>
<b>7. A modellezés menete .....</b>	<b>28</b>
<b>8. Eredmények .....</b>	<b>30</b>
<b>9. Összefoglalás .....</b>	<b>38</b>
<b>10. Melléklet.....</b>	<b>39</b>
<i>10.1. A program használata.....</i>	<i>39</i>
<i>10.2. Táblázatok .....</i>	<i>46</i>
<b>11. Felhasznált irodalom .....</b>	<b>50</b>
<b>12. Referenciák .....</b>	<b>50</b>

## 1. Bevezetés

Számos érdekes kísérlet vezetett arra az eredményre, hogy bizonyos nemlineáris rendszerekben a betáplált gyenge periodikus jel zaj hozzáadásával erősíthető. Ez a jelenség nem csak fizikai kísérleti összeállításokban, de az élő rendszerekben is megfigyelhető (például a folyami rák legyező farkában elhelyezkedő receptorok, illetve a mókus-majom hallóidegének vizsgálatakor).

A szakdolgozat célja ezen jelenség, a sztochasztikus rezonancia numerikus modellezése, ehhez egy számítógépen futó program készítése. Ehhez szükségünk van egy olyan eljárásra, mely egy adott differenciálegyenlet megoldásgörbéjét határozza meg. Ha rendelkezünk ezen jelalakkal, az ezen végzett későbbiekben tárgyalandó műveletek (teljesítménysűrűség spektrum, jel-zaj viszony számítás) eredményeként van lehetőségünk a jelenség tényleges bemutatására, vizsgálatára. A sztochasztikus rezonancia természetesen kísérleti úton is vizsgálható. Ehhez azonban komolyabb eszközökre van szükség, míg a numerikus modellezés estén elegendő egyetlen PC, valamint a megírt program. Másrészt lehetőség van arra, hogy esetlegesen olyan tartományokban végezzünk modellkísérleteket, melyeket laboratóriumban nem sikerült elérni.

A sztochasztikus rezonancia bizonyos sztochasztikus folyamatok során következik be, ezért elsősorban meg kell ismerkednünk a sztochasztikus jelekkel, illetve a sztochasztikus jelek különböző fontos statisztikai jellemzőinek leírásához szükséges függvényekkel, mennyiségekkel. Ahogyan látni fogjuk, megfelelő jelmodell esetén a számunkra fontos mennyiségek kiszámítása sokat egyszerűsödik, ezzel is megkönnyítve munkánkat.

Ezek után megismerkedhetünk a sztochasztikus rezonancia jelenségével, egy-dimenziós modelljén keresztül. Röviden áttekintjük a sztochasztikus rezonancia történetét, majd a jelenség magyarázatára alkotott elméletek közül ismerkedünk meg eggyel.

Ezek után már hozzáláthatunk a modellezés leírásához. Ennek matematikai hátterének rövid áttekintése után arról lesz szó, pontosan hogyan is zajlik a számítás, milyen körülményeket kell biztosítanunk

Ezek után a kapott eredményekről ejtünk pár szót. A dolgozat legvégén található mellékletben a program használati útmutatóján kívül a használathoz szükséges adatok találhatóak, táblázatszerű elrendezésben.

## 2. Sztochasztikus jelek leírása

A sztochasztikus jelmodellek (sztochasztikus folyamatok) a kölcsönhatások véletlen jellegét leíró valószínűségi eseménytér minden eleméhez egy-egy időfüggvényt rendelnek hozzá. A sztochasztikus folyamat felfogható időfüggvények egy olyan sokaságaként, melynek elemeit az eseménytér elemei generálják, illetve mint egy folytonos (idő-) paramétertől függő valószínűségi változó.

Általánosabban szólva, legyen  $I \neq \emptyset$  tetszőleges indexhalmaz és  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  egy valószínűségi mező. Az  $\mathfrak{R}$  értékű valószínűségi változók egy  $\{X_t : t \in I\}$  családját  $I$  paraméterű (indexhalmazú) és  $\mathfrak{R}$  állapotterű sztochasztikus folyamatnak (véletlen folyamatnak, véletlen függvénynek) nevezzük. Esetünkben az  $I$  halmaz az  $\mathfrak{R}$  valós tengely valamely  $[t_0, T]$  intervalluma, ( $t_0 < T$ ) és  $t$  paramétert mint időt interpretáljuk. Megengedettek a  $t_0 = -\infty$ , illetve a  $T = \infty$  esetek, egymástól függetlenül.

Ha  $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$  egy sztochasztikus folyamat, akkor minden rögzített  $t \in [t_0, T]$  esetén az  $X_t$  egy  $\mathfrak{R}$  értékű valószínűségi változó, míg bármely rögzített  $\omega \in \Omega$  esetén (tehát minden megfigyelésre)  $X$  egy  $[t_0, T]$ -n értelmezett  $\mathfrak{R}$  értékű függvény. Az így adódó függvényt a sztochasztikus folyamat realizációjának (trajektóriájának, lefutásának) nevezzük

Az  $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$  sztochasztikus folyamatot akkor tekinthetjük adottnak, ha

$$(2.1) \quad \begin{aligned} &P[X_t \leq x] = F_t(x) \\ &\vdots \\ &P[X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n] = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

véges dimenziós eloszlásai is adottak, ahol  $t, t_i \in [t_0, T]$ ,  $x, x_i \in \mathfrak{R}$  és  $n \geq 1$ .

Az eloszlásfüggvények ezen rendszere nyilvánvalóan kielégíti a következő két feltételt:

a) *Szimmetriafeltétel:* Ha  $\{i_1, \dots, i_n\}$  az  $1, \dots, n$  számon egy permutációja, akkor tetszőleges időpontokra és  $n \geq 1$ -re érvényes, hogy

$$(2.2) \quad F_{t_1, \dots, t_n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

b) *Kompatibilitási feltétel:*  $m < n$  és tetszőleges  $t_{m+1}, \dots, t_n \in [t_0, T]$  esetén érvényes, hogy

$$(2.3) \quad F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m).$$

Sok gyakorlati esetben a sztochasztikus folyamat nem mint valamely valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változócsalád van megadva, hanem a fent említett eloszlásoknak olyan összességként, melyek eloszlásfüggvényei kielégítik a szimmetria- és kompatibilitási feltételeket. E két megfogalmazás egyenértékűsége az alábbi tételből következik:

**Kolmogorov alaptétele:** Eloszlásfüggvények minden olyan családjához, amely a szimmetria- és kompatibilitási feltételeknek eleget tesz, létezik egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mező és azon egy  $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$  sztochasztikus folyamat, amelynek véges dimenziós eloszlásai épp az előre megadott eloszlások.

Nagyon sok esetben az eloszlásfüggvényeknek csak az első és másodrendű alakjait használjuk, mert alkalmazhatjuk a Markov-folyamat modellt, melynél az első és másodrendű függvények teljes leírást tesznek lehetővé. Egy sztochasztikus folyamatot Markov-folyamatnak nevezünk, amennyiben a folyamat egy  $t_n$  időpillanatbeli ismerete elegendő a  $t_{n+1}$  időpillanatbeli származtatásánál, a múltbeli viszonyok ismerete nem szükséges.

A sztochasztikus folyamatokat leíró legfontosabb paraméterek a következők:

A folyamat várható érték-idő függvénye:

$$(2.4) \quad \mu_x(t) = E\{x_t\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_t f_{x_t} dx_t,$$

ami azt fejezi ki, hogy a folyamat átlagos szintje hogyan alakul az idő függvényében.

A folyamat négyzetes középérték-idő függvénye:

$$(2.5) \quad \psi_x^2(t) = E\{x_t^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_t^2 f_{x_t}(x_t) dx_t,$$

ami a folyamat átlagos teljesítményével arányos.

A folyamat varianciája:

$$(2.6) \quad \text{var}\{x_t\} = E\{(x_t - E\{x_t\})^2\} = \psi_x^2(t) - \mu_x^2(t),$$

annak mérőszáma, hogy a pillanatérték milyen mértékben tér el az átlagtól.

A folyamat autokorreláció függvénye:

$$(2.7) \quad R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x_{t_1} x_{t_2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} f_{x_{t_1} x_{t_2}}(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2},$$

mely fizikai jelentését tekintve az időben eltolt mintavételi értékek közötti átlagos, kölcsönös teljesítménnyel arányos.

A folyamat autokovariancia függvénye:

$$(2.8) \quad C_{xx}(t_1, t_2) = E\{(x_{t_1} - E\{x_{t_1}\})(x_{t_2} - E\{x_{t_2}\})\} = R_{xx}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2),$$

mely a variancia fogalom általánosítása eltolt mintavételi értékek esetére.

Két folyamat keresztkorreláció függvénye:

$$(2.9) \quad R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x_{t_1} y_{t_2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2} f_{x_{t_1} y_{t_2}}(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2},$$

mely két sztochasztikus folyamat különböző időpontokban felvett értékei közötti átlagos, kölcsönös teljesítménnyel arányos.

Két folyamat keresztkovariancia függvénye:

$$(2.10) \quad C_{xy}(t_1, t_2) = E\{(x_{t_1} - E\{x_{t_1}\})(y_{t_2} - E\{y_{t_2}\})\} = R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_y(t_2),$$

mely a variancia fogalom általánosítása két sztochasztikus folyamatra és eltolt mintavételi értékek esetére.

Sok gyakorlati probléma esetén fontos, hogy a sztochasztikus folyamatot a frekvenciatartományban is jellemezni tudjuk. Erre a célra a teljesítménysűrűség függvény használható, mely azt adja meg, mekkora teljesítmény jut egy adott frekvenciasávba. A teljesítménysűrűség függvény a sztochasztikus folyamat autokorreláció függvényének Fourier-transzformáltja:

$$(2.11) \quad S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau.$$

A sztochasztikus folyamatok fontos esetei a stacionárius folyamatok. Egy folyamatot gyengén stacionáriusnak nevezünk, amennyiben első és másodrendű sűrűségfüggvényei az időtengely eltolására nézve invariánsak, így a sztochasztikus folyamat statisztikai jellemzői az abszolút időtől függetlenek. Ez azt jelenti, hogy a fent felsorolt mennyiségek közül a várható érték, a négyzetes középérték, valamint a variancia állandó, az autokorreláció, autokovariancia, keresztkorreláció, keresztkovariancia függvények pedig csak a bennük szereplő két időpont távolságától függnnek.

A gyakorlatban fontosak az úgynevezett ergodikus folyamatok. Ezek esetében a sokaság szerinti átlag a teljes időtartományra vonatkozó átlaggal egyezik meg, mely a statisztikai paraméterek számítását sokban leegyszerűsíti. Ekkor a sokaság szerinti átlag helyett (melyhez általában nincs megfelelően sok kísérleti eredmény), egyetlen realizációból számított időátlag meghatározása elegendő. A számunkra igazán fontos teljesítmény-sűrűség spektrum ilyenkor a következő módon számítható:

$$(2.12) \quad S(f) = |F(f)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt \right|^2$$

Figyelembe kell azonban vennünk, hogy mivel csak véges megfigyelési időtartam áll rendelkezésünkre, a meghatározott statisztikus jelparaméterek csak becült értékek, azaz szintén statisztikus ingadozást mutatnak. Ezen ingadozások kiküszöbölése minél hosszabb megfigyelési időtartam választásával, illetve átlagolási folyamat beiktatásával tehető meg.

A zajjal terhelt folyamatok jellemzésére használhatjuk az úgynevezett jel-zaj viszonyt. A jel-zaj viszonynak (SNR) kétféle definíciója is van, meghatározásához mindkét esetben a teljesítménysűrűség-spektrumot használjuk fel.

Egyrészt legyen az alapprofrecvencián a jelamplitúdó  $S$ , a zajé  $N$ . Ezek után az SNR-t a következő képlet adja:

$$(2.13) \quad \text{SNR} = \frac{S}{N},$$

illetve szokásos a mennyiséget logaritmikus skálán, decibelben megadni:



$$(2.14) \quad \text{SNR} = 10 \cdot \lg \frac{S}{N}.$$

A másik definíció szerint a felharmonikusokat is beleszámítjuk a jelbe, ekkor persze a zajt sem csak az alulfrekvencián vesszük figyelembe, hanem úgymond a “teljes” zajt számítjuk, vagyis a teljesítmény-sűrűség spektrum integrálját. Ekkor a definíció a következőképp néz ki:

$$(2.15) \quad S = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} S(f) df,$$

$$(2.16) \quad N = \int_0^{\infty} S_N(f) df, \text{ és}$$

$$(2.17) \quad \text{SNR} = \frac{S}{N}$$

Természetesen ebben az esetben is használhatjuk a (2.14) egyenlet által definiált logaritmikus skálán mért jel-zaj viszony definíciót. A (2.16) egyenletben az  $S_N(f)$  jelölés a zaj teljesítménysűrűség spektrumát jelenti, melyet úgy kaphatunk, hogy  $S(f)$ -ből “levágjuk” a jelnek megfelelő kiugrásokat.

### 3. A jelenség alapjai

A sztochasztikus rezonancia (SR) megfigyelésekor periodikus és sztochasztikus jelek egyidejű hatásait vizsgáljuk egy multistabil nemlineáris rendszerben. A jelenségnek rengeteg felhasználása van, többek között olyan eszközök létrehozása, melyek zajos mágneses mezők detektálására alkalmasak, a zajjal terhelt digitális információszállítás vizsgálata, valamint a zaj által indukált információátvitel az érzékelő neuronok között, az élő rendszerekben.

Az SR-t, mint fizikai jelenséget egydimenziós esetben könnyű megmagyarázni. Képzeljünk el például egy kötött részecskét, mely egy két minimummal rendelkező potenciáltérben mozog. Ilyen potenciált ír le például az

$$U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 \text{ egyenlet. Ezen potenciáltér két minimuma a } \pm c = \pm \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

értékeknél helyezkedik el, a minimum értéke  $\Delta U_0 = (U(x=0) - U(x=c))$ . Tegyük ki ezt a részecskét valamilyen véletlen erőnek. (Például a rendszert hőlégfürdőbe helyezhetjük, így a véletlen erők hőmérsékleti ingadozásokból származhatnak.) Ez az egyszerű modell a kiindulópontja számos molekuláris dinamikai modellnek. Ezen kívül feltételezzük, hogy a rendszerben egy periodikus moduláció is hat, mely gyenge és additív. Az additív úgy értendő, hogy a moduláció fizikai hatása az, hogy ide-oda "ringatja" a potenciált. Ennek az az eredménye, hogy váltakozva emeli, illetve mélyíti a potenciálvölgyeket, nem változtatva az őket elválasztó korlát magasságát. (Összehasonlításként a "multiplikatív" moduláció csak a korlát magasságát változtatja, változatlanul hagyva a völgyek szintjeit.) A gyenge azt jelenti, hogy a periodikus moduláció amplitúdója kisebb, mint a korlát magassága. Ez azt eredményezi, hogy zaj (azaz a sztochasztikus erő) hiányában a részecske mozgása mindig arra a potenciálvölgyre korlátozott, melyben a kezdeti időpillanatban volt. Ezzel ellentétben zaj jelenlétében (mindig fel fogjuk tételezni, hogy a zaj fehér zaj) mindig lesz valamekkora nem 0 valószínűsége annak, hogy a részecske "átugrik" az egyik völgyből a másikba.

Vizsgáljuk most a völgyek közötti váltásokat. Az SR a modulációs frekvencia és a Kramer-szám ( $r_0$ ) kölcsönhatása miatt lép fel. A Kramer-szám megadja a másodpercbkénti átlagos váltási számot a modulálatlan rendszerben.

$$(3.1) \quad r_0 = \frac{1}{2\pi} \left[ |U''(\mathbf{0})| \cdot U''(c) \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta U_0}{D}\right),$$

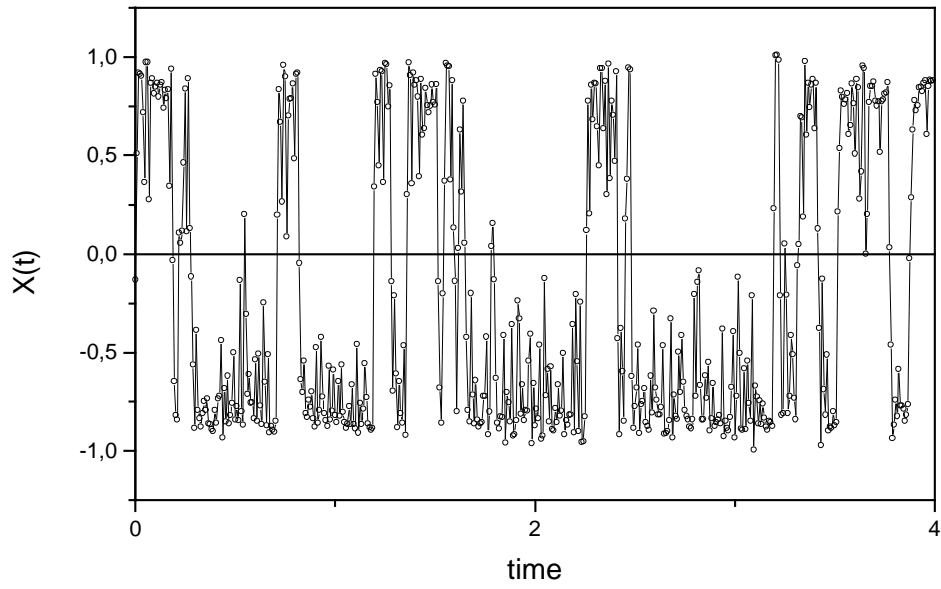
ahol  $U''(\mathbf{0})$  a potenciálgát görbülete, mely a két völgy között helyezkedik el ( $x = \mathbf{0}$ -nál),  $U''(c)$  a völgyek “aljának” görbülete ( $x = \pm c$ -nél). A két vonás természetesen a második deriváltat jelenti,  $x$  szerint. A modulálatlan gátmagasság  $\Delta U_0 = (U(x = \mathbf{0}) - U(x = c))$ . A zaj intenzitása  $D$ , mely a zaj autokorrelációs függvénye által definiált. Ez fehér zaj esetén Dirac-delta függvény.

$$(3.2) \quad R_{\xi\xi}(t, s) = 2D\delta(t - s)$$

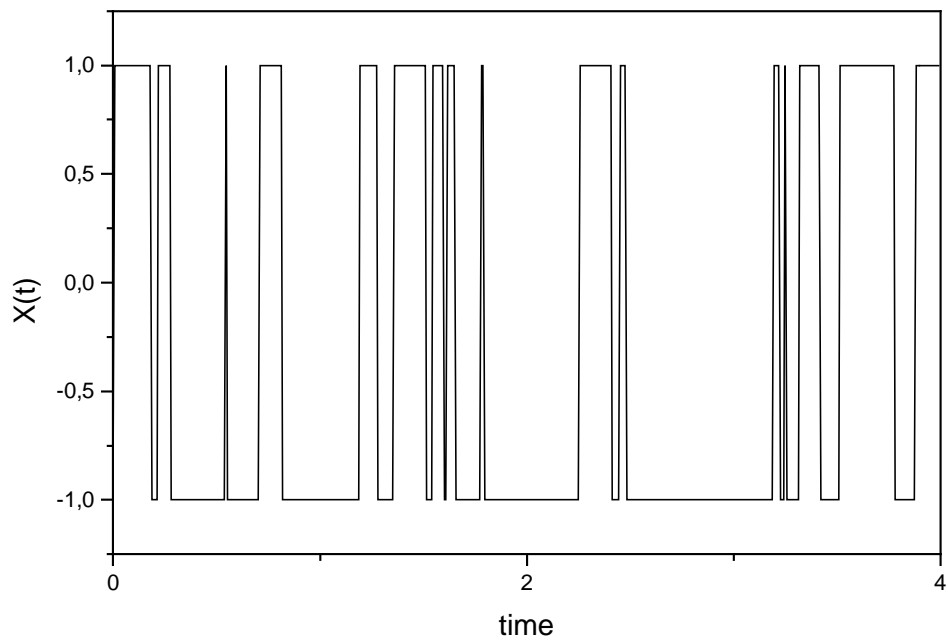
Moduláció hiányában a részecske átugrik az egyik völgyből a másikba, “véletlen” időpontokban, és “véletlen” hosszúságú időt tölt valamelyik völgyben, ahogyan azt a 1.a)Ábra mutatja. A mozgás ugyanazon völgyben maradv sztochasztikus. Gyakran azonban csak az érdekes, hogy a részecske melyik völgyben van, ilyenkor a völgyön belüli mozgást “eltüntethetjük” (filterezés), például, ha az  $x(t)$  értéket  $\pm 1$ -gyel helyettesítjük, attól függően, hogy a részecske éppen melyik völgyben található. Feltételezve, hogy az átlépési idő kicsi az átlagos “völgybenmaradási” időhöz képest a filterezés után kapott jelalak a 1.b)Ábrán látható.

Most tételezzük fel, hogy a részecske ki van téve egy gyenge periódikus modulációnak,  $\omega$  frekvencián. Ahogy említettük a gyenge azt jelenti, hogy a periodikus erő önmagában nem elegendő ahhoz, hogy a részecske “váltson” a két potenciálgödör között. Zaj jelenlétében a részecske átléphet egyik völgyből a másikba, mely váltások kapcsolatban vannak a modulációval (érthetően amennyiben a potenciálvölgy magasabb, kisebb zaj is elegendő a váltáshoz). A potenciál most időfüggő

$$(3.5) \quad U(x, t) = U_0(x) + A \cdot x \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



a) A részecske mozgása, csak zaj hatása alatt



b) A filterezett jel

1.Ábra

és ha  $A \ll \Delta U_0$  és  $\omega \ll r_0$  (ahogy a későbbiekben látjuk, ez az adiabatikus közelítés) a Kramer szám időfüggővé válik, és közelítőleg a következőképp írható fel:

$$(3.6) \quad r(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ |U''(\mathbf{0})| \cdot U''(c) \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta U_0 - Ac \sin(\omega \cdot t)}{D}\right),$$

$$= r_0 \exp(Ac \sin(\omega \cdot t) / D)$$

Elenyészően kicsi zajintenzitás esetén  $r$  0-hoz tart, ilyenkor a periodikus modulációtól való függés elenyészik. Nagyon nagy zajintenzitások esetén a periodikus gerjesztésről való függés ismét kicsi lesz, a rendszer válasza teljesen sztochasztikussá, véletlenszerűvé válik. Ezen két határ között létezik egy optimális zajintenzitás, mely maximálja a függést. Innen ered a rezonancia elnevezés. Bár a jelenség nyilván eltér a determinisztikus rezonanciáktól, a kifejezésnek jól definiált statisztikai jelentése van. A determinisztikus rezonancia akkor következik be, amikor például áramkörökben bizonyos tárolók (például egy tekercs és egy kondenzátor) közötti periodikus energiacsere amplitúdója maximális, valamely paraméterérték (általában a frekvencia) esetén. A vizsgált modellben a valószínűségi sűrűségek az egyes völgyekben (melyek viszonylagos részecske populációkat jelentenek) periodikusan váltakoznak. A populációs maximum ezek szerint váltakozik a két völgy között, mely valós energiacserenek felel meg. Mivel ennek amplitúdója ténylegesen maximummal rendelkezik egy kitüntetett zajintenzitás esetén, jogosnak vélhetjük a rezonancia elnevezést.

Az SR vizsgálatának két alapvető megközelítési módja lehet. Vizsgálhatjuk a redukált, kétállapotú rendszert, ahol csak az számít, hogy melyik völgyben található a részecske egy adott időpillanatban, illetve a teljes dinamikát, mely a váltásokon kívül információt hordoz az egyes völgyekben történő sztochasztikus mozgásról is.

A leggyakrabban használt mennyiség az SR vizsgálata során a teljesítmény-sűrűség spektrum. Valódi fizikai jelenségek során, melyek szimmetrikus  $U(x)$  potenciáltérben játszódnak le, a spektrum a Lorentz-görbe alakú zajból élesen kiugró vonalakból áll, csökkenő amplitúdókkal, a modulációs frekvencia páratlan számú többszöröseinél. A potenciál szimmetriájának

megszüntetése esetén gyengébb kiugrások jelennek meg az alapprofrendencia páros számú többszöröseinél. Az SR-t demonstrálhatjuk azzal, hogy a jel-zaj viszony 0-ról növekedve egy maximumon halad keresztül (mely egy optimális zajintenzitásnál helyezkedik el).

A teljes dinamika estén az SNR végtelenbe tart, amennyiben a zajintenzitás 0- hoz konvergál, köszönhetően a völgybeli (zaj nélkül) teljesen periódikus mozgásnak.

Egy másik kvantitatív jellemzési lehetőség, mely szintén jól demonstrálja a sztochasztikus válasz és a moduláció egymásra hatását, a "völgybenmaradási idő" valószínűségi sűrűségfüggvénye,  $P(T)$  vizsgálata. Ezen mennyiség Gauss-típusú görbék sorozatából áll, mely görbék "középpontja" a  $\frac{T}{2}$  fél periódusidő páratlan számú többszöröseinél helyezkedik el. A kiugrások ekkor exponenciálisan csökkenő amplitúdót mutatnak a növekvő  $T$  felé. Rövidebb időtartamokra az amplitúdónak maximuma van. A tárgyalás során mi a jel-zaj viszonyt vizsgáljuk.

## 4. Történeti áttekintés

Az SR mechanizmusát először Vulpiani és munkatársai(1) vetették fel és vizsgálták, mint egy érdekes jelenséget a nemlineáris dinamikában, melynek hasznos felhasználásai lehetnek. A fő elméleti probléma az, hogy külső, időben változó moduláció jelenléte esetén a sztochasztikus folyamatok nem stacionáriusak, következésképp az adott Langevin-egyenlethez tartozó Fokker-Planck egyenlet egzakt módon nem megoldható a valószínűségi sűrűsége. Ezáltal a nemstacionárius F-P egyenletek megoldása csak közelítésekkel kapható meg. Ezen “korai” alkotók ezért az átlagos tartózkodási időre kerestek közelítéseket, hogy demonstrálhassák, hogy ezen idő a külső gerjesztő moduláció periódusidejének felével összemérhetővé válik, a zajintenzitás valamely optimális értéke esetén.

A periodikusan vezérelt sztochasztikus rendszerekre vonatkozó “tartózkodási idő” elméletet, mely kikerüli a nemstacionárius F-P egyenletekkel lévő problémákat, már korábban kifejlesztette Eckmann, Thomas és Wittwer(2), és ezt a sztochasztikus rezonancia jelenségekre is sikeresen alkalmazták. Megemlíthetjük, hogy ilyen típusú méréseket tényleges fizikai SR-rendszerek esetén csak az utóbbi néhány évben kezdtek végezni. 1982-ben Vulpiani és társai Parisival kiegészülve(3) egy cikket jelentettek meg, melyben a jégkorszakok váltakozását a sztochasztikus rezonancia jelenségével magyarázzák. Ezen magyarázatot tőlük függetlenül felvetette C. és G. Nicolis(4) is, akik a máig is hasznos adiabatikus közelítést is javasolták.

A sztochasztikus rezonancia szempontjából vizsgálva a Föld klímáját, az egy egy-dimenziós kétállapotú potenciállal modellezhető, melyben az egyik stabil állapot a nagymértékben jéggel borított, a másik pedig a jégkorszakok közötti “normális” klímával rendelkező Föld. A külső zaj, mely a napsugárzás évi váltakozásából származik, azt okozza, hogy a rendszer “váltogat” a jégkori és a normális klíma között. Egy ilyen váltási-idősorozat, mely nagyjából kétszáz elemből áll, és egészen 3,5 millió évre nyúlik vissza, az  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$  izotópok arányából számítható, melyek a megkövesedett tengeri állattetemekben

találhatók. Ez az arány változik a jégkorok során, főként annak köszönhetően, hogy a felszíni réteg  $^{16}\text{O}$ -ban gazdagabb. Így a  $^{16}\text{O}$ -os víz “bezáródik” a jégtáblákba, ezáltal a meg nem fagyó víz  $^{18}\text{O}$ -ban gazdagabb lesz. Ahogy arról már szó volt, a külső zaj a napsugárzás váltakozásából származik, mely megváltoztatja a visszavert és beérkező sugarak egyensúlyát, a periodikus moduláció pedig a Föld-pálya excentricitásából következik, melynek periódusa 100000 év.

1983-ban Fauve és Heslot(5) kvantitatív méréseket végeztek, zajjal vezérelt és periodikusan modulált áramkörökben. Az áramkörben Schmitt triggerrel használtak. A Schmitt trigger két állapota közötti váltás “logikája” az alábbiak szerint képzelhető el: váltás jön létre A-ból B-be, ha még nem vagyunk a B állapotban és a zaj alulról átlép egy bizonyos  $x_1$  alsó küszöböt. B-ből A-ba váltás jön létre, amennyiben még nem vagyunk az A-állapotban, és a zaj keresztezi az  $x_2$  küszöböt, felülről. A zajjal vezérelt Schmitt trigger kimenete precíz reprezentációja egy ideális kétállapotú rendszernek. Mivel a két állapot rögzített (a kimeneten kétféle feszültség mérhető), a völgyön belüli mozgás nem vizsgálható. Fauve és Heslot a kimeneti teljesítményspektrumot mérték, ebből számították ki a jel-zaj viszonyt. Azt figyelték meg, hogy ez a mennyiség a zaj növelésével egy maximumon megy keresztül, ezzel elsőként demonstrálták a sztochasztikus rezonancia jelenségét laboratóriumi körülmények között. Azt találták, hogy a maximum helye a zajintenzitás olyan értékénél adódott, mely esetén a Kramer-szám a perturbálatlan rendszerben ( $r_0$ ) a modulációs frekvencia kétszeresének adódik.



## 5. Wiesenfeld és McNamara adiabatikus elmélete

Ahogy arról már szó volt, kétfajta modellt szokás alkalmazni a sztochasztikus rezonancia vizsgálatoknál: a teljes dinamikát vizsgáló, illetve a kétállapotú modellt. Mindkét esetben az elméletek két csoportba oszthatók: az adiabatikus közelítések, és a nem adiabatikus számítások. Bár eredetileg az eszközöket, melyekkel a Fokker-Planck rendszerekkel bánni lehet az adiabatikus közelítést használva, Caroll(6) adta meg, ezeket a sztochasztikus rezonancia problémákra C. Nicolis(4), illetve legújabbán Bryant, Wiesenfeld és McNamara(7) alkalmazta. Az első hasznos elméleti magyarázatot az SR jelenségre (ezt a közelítést használva) McNamara és Wiesenfeld(8) adta.

Ezen elméletben az adiabatikus szó azt jelöli, hogy az időbeli változások a potenciálban annyira lassúak, hogy úgy képzelhetjük, a valószínűségi sűrűség "adiabatikusan" követi a potenciál változását. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a külső gerjesztés frekvenciája kicsi legyen minden más  $\frac{1}{s}$  dimenziójú mennyiséghez képest. Egy nyilvánvaló választás lehet az összehasonlításhoz a Kramer-szám  $r_0$ . Másik lehetőség a potenciál görbülete (második deriváltja) közel a gát tetejéhez, illetve a völgyek alján. Ilyen körülmények között a stacionárius F-P dinamika használható, hogy kiszámoljuk a lassan változó időtől függő mennyiségeket, mint például a valószínűségi sűrűség, illetve a korrelációs függvények.

Célunk a teljesítményspektrum kiszámítása, egy két stabil állapottal rendelkező potenciáltérben mozgó részecske esetén. Jelöljük az  $x_{\pm}$  diszkrét változókat a részecske helyét a bal(+), illetve a jobb(-) potenciálvölgyben, a megfelelő valószínűségek  $n_{\pm}(t)$ , melyekre igaz, hogy  $n_{+}(t) = 1 - n_{-}(t)$ . Ezek segítségével felírhatjuk az egyes völgyekből való váltás ütemére vonatkozó egyenletet:

$$(5.1) \quad \frac{dn_{+}}{dt} = -\frac{dn_{-}}{dt} = W_{-}n_{-} - W_{+}n_{+}.$$

Vegyük észre, hogy egyedüli dinamikus változóink a részecske populációk az egyes potenciálvölgyekben. A valószínűségi sűrűségfüggvény ennek következtében két Dirac-delta függvény összegére redukálódik, melyek a két minimumban helyezkednek el, és  $n_+$ , illetve  $n_-$  értékekkel vannak súlyozva. Ahhoz, hogy a fenti egyenlet megoldható legyen, szükségünk van  $W_{\pm}$  valamilyen közelítésére. McNamara és Wiesenfeld ezt a következőképp tette meg:

$$(5.2) \quad W_{\pm} = \frac{1}{2}(\alpha_0 \pm \alpha_1 \eta_0 \cos \omega_0 t + \dots),$$

ahol  $\eta_0 = \frac{A}{D}$ , és  $\alpha_0$ , valamint az  $\alpha_1 \eta_0$  szorzat a rendszer paramétereiként tekintett. Ezt a formulát közvetlenül megkaphatjuk a

$$(5.3) \quad r(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ |U''(\mathbf{0})| \cdot U''(c) \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta U_0 - A c \sin(\omega \cdot t)}{D}\right)$$

egyenletből, amennyiben  $\alpha_0$ -nak az “alap” Kramer számot,  $r_0$ -t tekintjük. Ekkor a rendszer másik paraméterére  $\alpha_1 \eta_0 \equiv \frac{A \cdot c}{D}$ . Az egyenlet a következő alakra redukálódik:

$$(5.4) \quad r(t) \equiv r_0 \left[ 1 + \frac{A \cdot c}{D} \sin \omega t \right],$$

amely egy fázisfaktortól eltekintve  $W_{\pm}$  fenti közelítésének felel meg. A (5.1) egyenletből megoldást kaphatunk  $n_+$ -ra, melynek segítségével meghatározható az autokorrelációs függvény. A Wiener-Khintchine elmélet alapján ebből a teljesítménysűrűség spektrum

$$(5.5) \quad S(\omega) = \left[ 1 - \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2}{2(\alpha_0^2 + \omega_0^2)} \right] \left[ \frac{4 \langle x^2 \rangle \alpha_0}{\alpha_0^2 + \omega^2} \right] + \frac{\pi \langle x^2 \rangle \alpha_1^2 \eta_0^2}{\alpha_0^2 + \omega^2} \delta(\omega - \omega_0).$$

Ebből az eredményből két számottevő megállapítást is levonhatunk (melyeket a kísérletek is igazoltak). Egyrészt a teljesítményspektrum a következőképp írható le: a Lorentz-görbe alakú háttérzajból kiemelkedik egy delta-függvény az alapfrekvenciánál. Másrészt a zaj és a jel együttes teljesítménye állandó. Ez az eredmény azt mutatja meg számunka, hogy egy ilyen bistabil rendszerben a zaj

megfelelő alkalmazása a bemeneten nagyobb “rendet” okoz a kimeneten. Ez egy lineáris rendszer esetében nem lenne lehetséges.

Wiesenfeld és McNamara általánosították elméletüket, ennek eredményeként lehetőség nyílt a teljes dinamikát használó modell leírására is. Ekkor a potenciál alakja:

$$(5.6) \quad U(x,t) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 - Ax \cos \omega_0 t,$$

ahol a perturbálatlan ( $A = 0$ ) potenciálra  $\Delta U_0 = \frac{a^2}{4b}$  a minimum értéke, mely a

$\pm c = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$  értéknél helyezkedik el. Ennek alapján a Langevin-egyenlet a

következő alakban írható:

$$(5.7) \quad \dot{x} = -\partial U_x(x,t) = a \cdot x - b \cdot x^3 + A \cos \omega_0 t + \sqrt{2D}\xi(t).$$

Ebben az esetben a paraméterek a következő alakot öltik:  $\alpha_0 = \frac{\sqrt{2a}}{\pi} \exp \frac{-\Delta U_0}{D}$ ;

$\alpha_1 = 2\alpha_0$  és  $\eta_0 = \frac{A \cdot c}{2 \cdot D}$ , melyeket behelyettesíthetünk a teljesítménysűrűség

spektrum előbb is használt felírásába, mely így a következő alakot ölti:

$$(5.8) \quad S(\omega) = \left[ 1 - \frac{\left(\frac{aAcr}{\pi D^2}\right)^2}{2\left(\frac{ar}{\pi}\right)^2 + \omega_0^2} \right] \left[ \frac{4\sqrt{2} \frac{ac^2r}{\pi}}{2\left(\frac{ar}{\pi}\right)^2 + \omega^2} \right] + \left[ \frac{2\pi \left(\frac{aArc^2}{\pi D}\right)^2}{2\left(\frac{ar}{\pi}\right)^2 + \omega_0^2} \right] \delta(\omega - \omega_0),$$

ahol  $r \equiv \exp \frac{-\Delta U_0}{D}$ . Ebből a jel-zaj viszony:

$$(5.9) \quad \text{SNR} = \frac{\sqrt{2} \frac{aA^2c^2r}{4D^2}}{1 - \frac{\left(\frac{aAcr}{\pi D^2}\right)^2}{2\left(\frac{ar}{\pi}\right)^2 + \omega_0^2}},$$

melyre kis modulációs erő esetén az alábbi közelítés adható:

$$(5.10) \quad \text{SNR} \cong \sqrt{2} \frac{aA^2c^2}{4D^2} \exp \frac{-\Delta U_0}{D}.$$

## 6. A modellezés matematikai háttéréről

A sztochasztikus rezonancia numerikus modellezéséhez egy sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása a célunk. Egy ilyen egyenlet megoldása mindig Markov-folyamat. Ezen folyamattal ismerkedünk meg részletesebben először. Ahhoz, hogy egy sztochasztikus differenciálegyenletet megoldhassunk, szükségünk lesz a Wiener-folyamat ismeretére, ennek segítségével küszöbölhetjük ki a fehér zajt az egyenletből. Hogy ez hogyan tehető meg, azzal a fejezet végén foglalkozunk. Ezek után a differenciálegyenletek numerikus módszereiről ejtünk pár szót.

### 6.1. Markov-folyamatok

Klasszikus fizikai folyamatok esetén mindig érvényesül az úgynevezett oksági elv, mely szerint elegendő egy bizonyos rendszerállapot ismerete az összes jövőbeni időponthoz tartozó állapot meghatározásához. Ez a tény analitikusan a közönséges differenciálegyenletek elméletében fejeződik ki. Az

$$(6.1) \quad \dot{x}_t = f(t, x_t)$$

differenciálegyenlet azt jelenti, hogy az  $x_t$  változási sebessége a  $t$  időpillanatban csak  $x_t$ -től és  $t$ -től függ, de nem függ az  $x_s, s < t$  értékektől. Ezen elv kiterjeszhető a sztochasztikus dinamikus rendszerekre is.

A sztochasztikus folyamatok speciális esetei a Markov-folyamatok. Ezek rendelkeznek az úgynevezett Markov-tulajdonsággal, melyet szavakban a következőképp fogalmazhatunk meg: Ha egy rendszer állapota egy bizonyos  $s$  időpontban ismert, akkor a  $t > s$  időpontban való sztochasztikus viselkedésére nézve a  $t < s$  időpontokban fennálló állapotokra vonatkozó további információ nincs befolyással. Ezt szokás úgy megfogalmazni, hogy a vizsgált folyamat "memória nélküli", más szóval utóhatásmentes.

A definíció matematikai leírásához vegyük figyelembe, hogy a sztochasztikus  $X_t$  folyamat az  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  valószínűségi mezőn van értelmezve. Mindig tekinthetjük úgy, hogy

$$(6.2) \quad \Omega = \mathfrak{R}^{[t_0, T]},$$

a  $[t_0, T]$  intervallumon értelmezett összes  $\mathfrak{R}$  értékű függvények tere,

$$(6.3) \quad A = \mathfrak{B}^{[t_0, T]},$$

az  $\mathfrak{R}$  beli Borel-halmazok által generált szorzat  $\sigma$ -algebra, és  $X_t = \omega(t)$ , minden  $\omega \in \Omega$  esetén. A  $P$  valószínűség ezek után Kolmogorov alaptétele szerint az  $X_t$  folyamat végesdimenziós eloszlásai által egyértelműen meghatározott valószínűségi mérték az  $(\Omega, A)$  mérhető téren. Legyen  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$  esetén

$$(6.4) \quad A([t_1, t_2]) = A(X_t, t_1 \leq t \leq t_2)$$

A azon legszűkebb rész  $\sigma$ -algebrája, melyre nézve az  $X_t, t_1 \leq t \leq t_2$  valószínűségi változók mind mérhetőek. Szemléletesen szólva az  $A([t_1, t_2])$  tartalmazza az  $X_t$  folyamat  $t_1$ -től  $t_2$ -ig terjedő időszak alatti történetét, vagyis azokat az eseményeket, amelyeket kizárólag az  $X_t$  folyamat  $[t_1, t_2]$ -beli lefutására vonatkozó feltételek határoznak meg. Ezek után már meg tudjuk adni a matematikai definíciót.

**Definíció:** Az  $(\Omega, A, P)$  valószínűségi mezőn értelmezett  $[t_0, T]$  paraméterrel és  $\mathfrak{R}$  állapottérrel rendelkező  $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$  sztochasztikus folyamatot (elemi vagy gyenge-) Markov-folyamatnak nevezzük, ha  $t_0 \leq s \leq t \leq T$  és minden  $B \in \mathfrak{B}$  esetén 1 valószínűséggel teljesül a

$$(6.5) \quad P(X_t \in B | A[t_0, s]) = P(X_t \in B | X_s)$$

ügynevezett (elemi vagy gyenge-) Markov-tulajdonság.

A fenti  $P(X_t \in B | X_s)$  feltételes valószínűséghez tartozik egy  $P(s, X_s, t, B)$  feltételes eloszlás, melyre igaz a következő néhány állítás:

a) Bármely rögzített  $s \leq t$  és  $B \in \mathfrak{B}$  esetén

$$(6.6) \quad P(s, X_s, t, B) = P(X_t \in B | X_s)$$

1 valószínűséggel fennáll.

b) A  $P(s, x, t, B)$  függvény valószínűségi mérték  $\mathfrak{B}$ -n, minden rögzített  $s \leq t$  és  $x \in \mathfrak{R}$  esetén.

c)  $AP(s, x, t, B)$  függvény  $\mathfrak{B}$ -mérhető, minden rögzített  $s \leq t$  és  $B \in \mathfrak{B}$  esetén.

d) Bármely  $t_0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , valamint minden  $x \in B$  esetén (esetleg egy  $N \subset \mathfrak{X}, P[X_s \in N] = \mathbf{0}$  halmaz kivételével) érvényes a

$$(6.7) \quad P(s, x, t, B) = \int_{\mathfrak{X}} P(u, y, t, B) P(s, x, u, dy)$$

úgynevezett Chapman-Kolmogorov egyenlet.

e) Minden  $s \in [t_0, T]$  és  $B \in \mathcal{B}$  esetén

$$(6.8) \quad P(s, x, s, B) = I_B(x) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{ha } x \in B \\ \mathbf{0}, & \text{ha } x \notin B \end{cases}$$

**Definíció:** Egy  $P(s, x, t, B)$  függvényt, amely rendelkezik a fenti b) - e) tulajdonságokkal, átmenet-valószínűségnek (átmenet-függvénynek) nevezzük. Ha  $X_t$  egy Markov-folyamat, és  $P(s, x, t, B)$  egy olyan átmenet-valószínűség, melyre a) is teljesül, akkor őt a Markov-folyamat átmenet-valószínűségének nevezzük.

A  $P(s, x, t, B)$  szemléletesen annak a valószínűsége, hogy a vizsgált folyamat a  $t$  időpontban a  $B$  halmazban tartózkodik, feltéve, hogy az  $s \leq t$  időpontban az  $x$  állapotban volt.

**Megjegyzés:** Ha a  $P(s, x, t, B)$  valószínűségek sűrűségfüggvényből származtathatók, azaz minden  $s, t \in [t_0, T]$  és  $x \in \mathfrak{X}$  esetén a

$$(6.9) \quad P(s, x, t, B) = \int_B p(s, x, t, y) dy$$

egyenlőség bármely  $B \in \mathcal{B}$  esetén teljesül –ahol  $p(s, x, t, y) \geq \mathbf{0}$  egy  $y$ -ban mérhető függvény, melynek az állapottéren vett integrálja 1-gyel egyenlő–, akkor a Chapman-Kolmogorov egyenlet az alábbi összefüggésre redukálódik:

$$(6.10) \quad p(s, x, t, y) = \int_{\mathfrak{X}} p(s, x, u, z) \cdot p(s, u, z, y) dz.$$

A Markov-folyamatok nem csak a definíció alapján lehetnek adottak, hanem gyakran az átmenet-valószínűségekkel vannak meghatározva. Hogy ez a megadás is “jogos”, az alábbi tételek alapján érthető.

**Tétel:** Ha  $X_t, t \in [t_0, T]$  egy Markov-folyamat,  $P(s, x, t, B)$  átmenet-valószínűséggel és az  $X_{t_0}$  (mint valószínűségi változó) eloszlása  $P_{t_0}$ , akkor  $X_t$  végesdimenziós eloszlásai egyértelműen meghatározhatók.

**Tétel:** Legyen  $P(s, x, t, B)$  egy átmenet-valószínűség,  $s, t \in [t_0, T]$ . Ekkor a  $B$ -n értelmezett tetszőleges  $P_{t_0}$  "kezdeti eloszláshoz" létezik egy  $(\Omega, A, P)$  valószínűségi mező és ezen egy  $X_t, t \in [t_0, T]$  Markov-folyamat, amelynek  $P(s, x, t, B)$  az átmenet-valószínűsége és az  $X_{t_0}$  eloszlása  $P_{t_0}$ .

**Definíció:** Egy Markov-folyamatot (időben) homogénnek nevezünk, ha  $P(s, x, t, B)$  átmenet-valószínűsége stacionárius, azaz ha bármely  $t_0 \leq s \leq t \leq T$ ,  $t_0 \leq s+u \leq t+u \leq T$  esetén azonosan teljesül a

$$(6.11) \quad P(s+u, x, t+u, B) = P(s, x, t, B)$$

feltétel. Ekkor az átmenet-valószínűség csak az  $x$ , a  $t-s$  és a  $B$  függvénye, így az a

$$(6.12) \quad P(s, x, t, B) = P(t-s, x, B), \quad 0 \leq t-s \leq T-t_0$$

formába írható. A  $P(t, x, B)$  tehát a  $t$  idő alatti,  $x$ -ből  $B$ -be való átmenet valószínűsége, függetlenül attól, hogy a  $t$  hosszúságú intervallum hol helyezkedik el.

## 6.2. A Wiener-folyamat

A Wiener-folyamat egy  $[0, \infty)$ -ben definiált homogén Markov-folyamat,

$$(6.13) \quad P(t, x, B) = P(W_{t+s} \in B \mid W_s = x) = \int_B (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \quad (t > 0)$$

stacionárius átmenet-valószínűséggel.

**Tétel:** A  $W_t$  Wiener-folyamat Gauss-folyamat

$$(6.14) \quad E(W_t) = \mathbf{0} \quad \text{várható értékkel és}$$

$$(6.15) \quad R_{WW}(t, s) = E((W_t - E(W_t))(W_s - E(W_s))) = \min(t, s)$$

korrelációfüggvénnyel.

Alapvető fontosságú továbbá a következő tulajdonság:  $W_t$  független növekményű, azaz  $0 < t_1 < \dots < t_n$  esetén a

$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

valószínűségi változók függetlenek. Ezen kívül  $W_t - W_s$  ( $s < t$ ) csak  $(t-s)$ -től függő normális eloszlású,  $0$  várható értékű,  $(t-s)$  szórásnégyzetű valószínűségi

változó  $((W_t - W_s) \sim N(\mathbf{0}, (t-s)))$ , vagyis a folyamat stacionárius növekményű. Ez a tulajdonság akár a Wiener-folyamat egy új definíciójául is szolgálhat. Ezen definíció segít hozzá bennünket ahhoz, hogy egy Wiener-folyamatot előállíthassunk.

### 6.3. A fehér zaj

Az úgynevezett Gauss-féle fehér zajt a mérnöki irodalomban stacionárius Gauss-folyamatnak szokták felfogni, amely  $E(\xi_t) = \mathbf{0}$  középvértékkel és a teljes valós tengelyen konstans  $S(f)$  teljesítménysűrűséggel rendelkezik. Ha  $R_{\xi\xi}(s, t) = C(t-s)$  a  $\xi_t$  korreláció függvénye, akkor kell, hogy minden  $f \in \mathfrak{R}$ -re érvényes legyen

$$(6.16) \quad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t) \exp(-i2\pi ft) dt = c$$

valamilyen  $c$  pozitív konstanssal, melyet az általánosság megszorítása nélkül 1-nek választhatunk. A vizsgált folyamatnak tehát olyan spektruma van, amelyben az összes frekvencia egyenlő intenzitással vesz részt, tehát (analóg módon az optikában vizsgált fehér fényhez, amely a látható fény összes frekvencia összetevőjét egyenletes megoszlásban tartalmazza) “fehér” spektrumnak nevezhető. Ilyen folyamat azonban tradicionálisan nem létezik, mert a fenti egyenlet csak  $C(t) = \delta(t)$  választással egyeztethető össze, ahol  $\delta$  a Dirac-féle  $\delta$ -függvény. Ekkor azonban

$$(6.17) \quad C(\mathbf{0}) = E(\xi_t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(i2\pi f \mathbf{0}) df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = +\infty.$$

A  $C(t) = \mathbf{0}$ ,  $(t \neq \mathbf{0})$  miatt a  $\xi_s$  és  $\xi_{s+t}$  értékek tetszőlegesen kicsi  $t$  esetén is korrelálatlanok lennének, ami megmagyarázza a szokásos “tisztán véletlen folyamat” elnevezést.

Az általánosított függvények elméletének segítségével belátható, hogy a Wiener-folyamat és a fehér zaj között érvényes a következő összefüggés: a  $\xi_t$  fehér zaj a  $W_t$  Wiener-folyamat deriváltja, amennyiben mindkét folyamatot



általánosított sztochasztikus folyamatnak fogjuk fel. Ezt formulák segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$(6.18) \quad \xi_t = \dot{W}_t \text{ és } W_t = \int_0^t \xi_s ds.$$

#### 6.4. Sztochasztikus integrálok

Sztochasztikus integrálokról beszélünk, ha a vizsgált differenciálegyenlet a következő alakú

$$(6.19) \quad X'(t) = f(X(t), t) + G(X(t), t)\xi_t,$$

ahol  $\xi_t$  az úgynevezett fehér zaj. Az előbb már láttuk, hogy bár a fehér zaj nem közönséges sztochasztikus folyamat, határozatlan integrálja mégis a Wiener-folyamattal azonosítható:

$$(6.20) \quad W_t = \int_0^t \xi_s ds,$$

vagy rövidebb szimbolikus írásmóddal:

$$(6.21) \quad dW_t = \xi_t dt.$$

Valamely

$$(6.22) \quad X'(t) = f(X(t), t), \quad X(t_0) = c$$

determinisztikus kezdetiérték probléma megoldása folytonos  $f(x, t)$  függvény esetén ekvivalens az

$$(6.23) \quad X(t) = c + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds$$

integrálegyenlet megoldásával.

Átalakítva a vizsgált sztochasztikus differenciálegyenletet integrálegyenletté:

$$(6.24) \quad X(t) = c + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds + \int_{t_0}^t G(X(s), s)\xi_s ds.$$

Itt az első integrál valamely klasszikus numerikus módszerrel kiszámítható, gond csak a második taggal van. Ebből azonban a fehér zaj formálisan kiküszöbölhető, a  $dW_t = \xi_t dt$  összefüggés segítségével, így az egyenlet a következő alakot ölti:

$$(6.25) \quad X(t) = c + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds + \int_{t_0}^t G(X(s), s) dW_s .$$

Kihasználva még, hogy a minket érdeklő esetben a  $G(x, t) = G$  függvény speciálisan konstans

$$(6.26) \quad \begin{aligned} X(t) &= c + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds + \int_{t_0}^t G \cdot dW_s = c + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds + G \int_{t_0}^t dW_s = \\ &= c + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds + G \cdot (W_t - W_{t_0}) . \end{aligned}$$

Látható, hogy ez az integrálegyenlet a klasszikus módszerekkel megoldható, amennyiben a megfelelő  $h$  beosztáshoz ( $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , és  $t_i - t_{i-1} = h$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )) rendelkezünk a Wiener-folyamat kiszámított értékeivel. Ezen értékek kiszámításánál azt lehet kihasználni, hogy  $dW_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  normális eloszlású valószínűségi változó, 0 várható értékkel és  $t_i - t_{i-1} = h$  szórásnégyzettel.

Ezek után alkalmazható valamely klasszikus numerikus módszer, megfelelő változtatással. Könnyen belátható, hogy az általunk vizsgált

$$(6.27) \quad \dot{x} = -\partial U_x(x, t) = ax - bx^3 + A \cdot f(t, T) + \sqrt{2D} \xi(t)$$

egyenlet esetén, ahol  $f(t, T)$  a  $T$  periódusidejű gerjesztés (mely lehet szinuszos, illetve “erőlökés” típusú) rendelkezik a megfelelő tulajdonságokkal ahhoz, hogy a negyedrendű Runge-Kutta módszert alkalmazhassuk.

A “módosított” negyedrendű Runge-Kutta módszer a következőképp írható fel (konstans  $G(x, t) = G$  függvény esetén):

$$(6.28) \quad x_{t_{n+1}} = x_{t_n} + h\Phi(x_n, t_n, h, dW_{t_n}),$$

ahol

$$(6.29) \quad \Phi(x_n, t_n, h, dW_{t_n}) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + G \cdot dW_{t_n},$$

$$k_1 := f(x_n, t_n), \quad k_2 := f\left(x_n + \frac{h}{2}(k_1 + dW_{t_n}), t_n + \frac{h}{2}\right),$$

$$(6.30) \quad k_3 := f\left(x_n + \frac{h}{2}(k_2 + dW_{t_n}), t_n + \frac{h}{2}\right), \quad k_4 := f(x_n + h(k_3 + dW_{t_n}), x_n + h),$$

$$dW_{t_n} = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}.$$

Ezen módszer segítségével most már lehetőségünk van arra, hogy két-  
állapotú potenciáltérben sztochasztikusan mozgó részecske pályáját vizsgáljuk.

## 7. A modellezés menete

A modellezéshez a legegyszerűbb, egy-dimenziós modellt alkalmaztam. A sztochasztikus rezonancia bemutatásához a szokásos vizsgálatok közül a jel-zaj viszonyt felhasználó megközelítést használtam. Az én munkám főleg arra korlátozódott, hogy az előbb ismertetett módszer segítségével a modellezés alapját, a

$$(7.1) \quad \dot{x} = ax - bx^3 + A \cdot f(t, T) + \sqrt{2D}\xi(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet megoldjam, majd teljesítményspektrumot, abból pedig jel-zaj viszonyt számítsak. Ehhez az előző fejezet végén leírt általam módosított negyedrendű Runge-Kutta módszert használtam. Ezen módszer megfelelő működésének ellenőrzése, az elsődleges tesztelés, ismert megoldású differenciálegyenletek segítségével történt (pl.  $\dot{x}(t) = x(t)$ ,  $x(0) = 0$ ).

Ahhoz, hogy később a Fourier-transzformáció “jól” elvégezhető legyen, arra van szükség, hogy a vizsgált jelminta mindig egész számú periódust tartalmazzon. A mintavételezési frekvenciát ezért mindig úgy állítom be, hogy az alapfrekvencia 128-szorosa legyen. Ekkor ugyanis az 1024 pontból álló mintából képzett teljesítménysűrűség spektrumában mindig a nyolcadik pont lesz a jel alapfrekvenciájának megfelelő.

A Runge-Kutta módszer, mint ahogyan minden numerikus módszer csak bizonyos hibával képes számolni, ezért szükséges, hogy a benne használt  $h$  beosztás (mely éppen 1/mintavételezési frekvenciával egyenlő) kisebb legyen, mint  $10^{-2}$ . (Ekkor ugyanis még az 1024. kiszámított pont hibájának nagyságrendje is  $10^{-4}$  alatt marad.) Ez viszont azt jelenti számunkra, hogy ha a külső gerjesztés frekvenciája 1 alá megy, a beosztás ( $h$ ) átlépi a kritikus értéket. Ekkor úgy jártam el, hogy egy  $h' (< 10^{-2} < h)$  módosított beosztásnak megfelelően számoltam, de csak a mintavételi frekvencia által definiált eredeti  $h$  beosztáshoz tartozó értékeket tartottam meg. Ezzel egy probléma adódik, a program futását nagyon lelassítja az, hogy a szükségesnél jóval több pontban kell a számolásokat elvégezni.

Az indulási értékek nem megfelelő beállítása azt eredményezheti, hogy a jelben kezdeti tranziens szakaszok jelennek meg. Ezek a teljesítménysűrűség spektrumban is nem kívánt változásokat okoznak. Ezért a jelalak kiszámításakor az első néhány periódust mindig “eldobjuk”, és a számítást annyival tovább végezzük, hogy a jel összesen nyolc periódusból álljon.

A meghatározott jelből a sztochasztikus rezonancia vizsgálatához teljesítménysűrűség spektrumot kell számítani. Ez a (2.12) egyenlet által meghatározott módon a Fourier transzformáltból tehető meg. A Fourier transzformált meghatározása FFT (Fast Fourier Transform) algoritmus segítségével történik. Ennek kimenetéből könnyen meghatározható a kívánt teljesítménysűrűség spektrum.

Ahhoz, hogy a statisztikus hiba minél kisebb maradjon, átlagképzési eljárást kell alkalmaznunk. Ez a következőképp történik. Amikor teljes mérési sorozatot modellezünk, összesen 32 különböző bemeneti zajérték esetén számítjuk ki a jel-zaj viszonyt. Minden egyes ilyen számításnál 256-szor állítjuk elő a jelet ugyanazon paraméterekből kiindulva. (Először levágjuk a kezdeti tranziens szakaszokat, majd a folytonosan számított jelből vágunk ki nyolc periódus hosszúságú darabokat.) Minden egyes jelszakaszból kiszámítjuk a teljesítménysűrűség spektrumot, majd ezek összegéből számítjuk ki az egyes SNR-értékeket.

A jel-zaj viszonyt a (2.15)-(2.17) egyenletek általi definíció segítségével számítottam ki. A jel frekvenciájánál és a felharmonikusoknál a zaj értékét a szomszédos három-három pontra illesztett egyenesből határoztam meg. Ezek után már csak egy numerikus integrálásra volt szükség, melyhez a trapézformulát használtam fel.

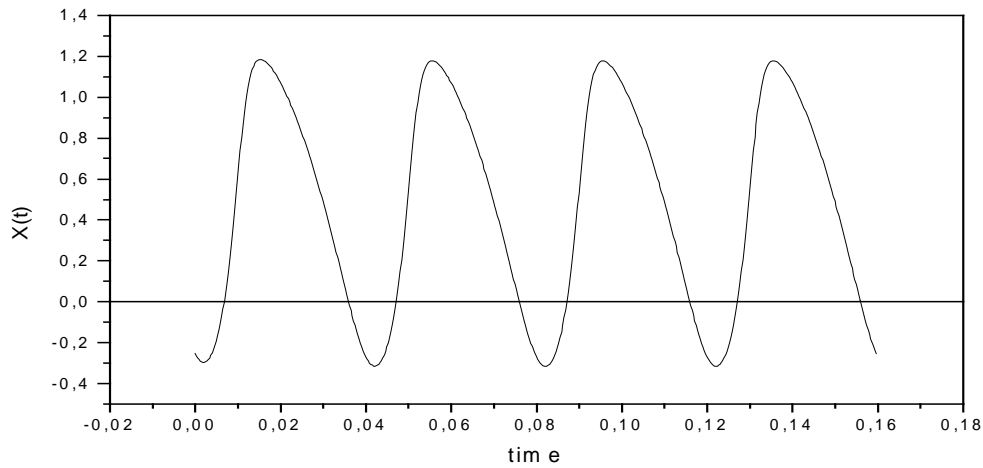
A program használatához szükséges egyéb információk a mellékletben megtalálhatók.

## 8. Eredmények

Ebben a fejezetben arról lesz szó, milyen paraméterek mellett használható a rendszer. Ezen paraméterek programozási megfontolásokból adódnak. Amennyiben ezek a határok a rendelkezésünkre állnak, megkezdődhet az alkalmazás, mely során a többi paraméterekre keresünk értékeket, melyek mellett a mérések modellezése jól működik.

Először is meg kell jegyeznünk, hogy a numerikus modell estén nincs értelme a mértékegységekről beszélni, a számítógép egyszerűen számokat vár. Ezért amikor akár frekvencia-, akár amplitúdó-értékeket említek, azok mellett sohasem szerepel a mértékegység, ezeket egyszerűen számoknak fogjuk fel. A modellezett rendszer egyik fizikai korláta például azon frekvenciatartomány, melyben a rendszert alkalmazni lehet. Ennek meghatározásánál az első problémát az jelentette, hogy a numerikusan meghatározott jelalak nem hasonlított a mérésekben kapotthoz. Kiderült, hogy a modell annyira nagyfrekvenciás mérésnek felel meg, melyet kísérleti körülmények között nem is sikerült előállítani. (Ez azért jelent problémát, mert a számunkra fontos tartomány éppen a kisebb frekvenciáknak megfelelő, és a számítás az 1 alatti frekvenciák esetében több órát is igénybe vehet, amennyiben egy teljes mérési sorozatot próbálunk modellezni.) A potenciál alkalmas konstanssal történő beszorzásával azonban sikerült a frekvenciatartományt úgy eltolni, hogy a modell jól működik az 1.7-es frekvencia értéktől felfele. A felső határ megszabásánál azt vehetjük figyelembe, hogy számunkra azok az esetek bírnak jelentőséggel, melyeknél a rendszer két állapota közötti váltás nagyon kis idő alatt bekövetkezik. Ahogyan ez a 2. Ábráról látható, ez már a 25 értéknél sincs így. Megfigyelhető, hogy a részecske képes átlépni az egyik potenciálvölgyből a másikba, majd még a "gát tetején" visszafordul, anélkül, hogy tartósan maradna a másik völgyben. E miatt úgy tűnt, a 25-ös frekvenciaérték felett nem érdemes méréseket végezni.

A rendszerre jellemző másik paraméter, mely limitálja a megfelelő működést a zaj amplitúdója. Amit mi megadhatunk, az csak egy konstans, mellyel a megfelelő beosztáshoz kiszámított zajértékeket szorozhatjuk be.



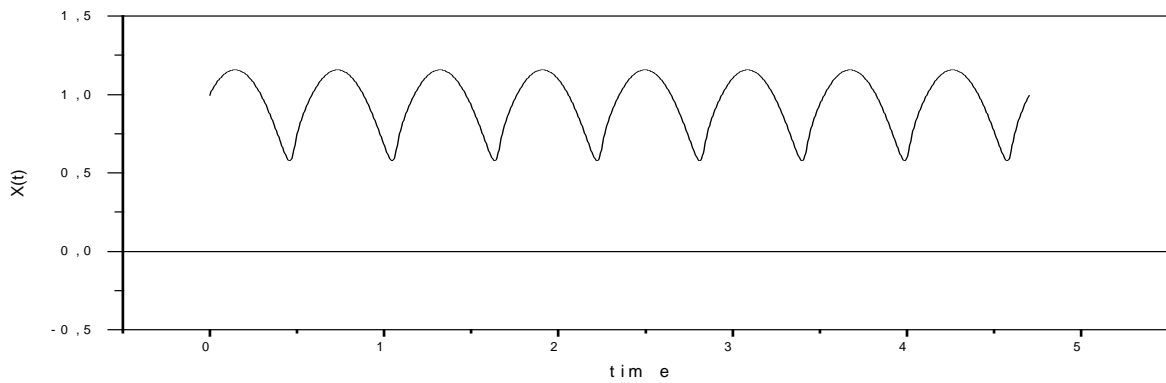
**2.Ábra. A jelalak zaj nélkül, nagy frekvencián**

Meghatározható az egyes frekvenciákhoz tartozó azon zaj-érték, mely esetén a rendszer még számolási hiba nélkül képes működni. (Ezen határ abból adódik, hogy a számítógépben az adattípusoknak mindig van egy alsó és felső korláta, a legnagyobb, illetve a legkisebb érték, melyet még tárolni tudunk. Ha ezen értékeket átlépjük, az számolási hibához vezet.) Ezen értékeket tartalmazza a Melléklet első táblázata.

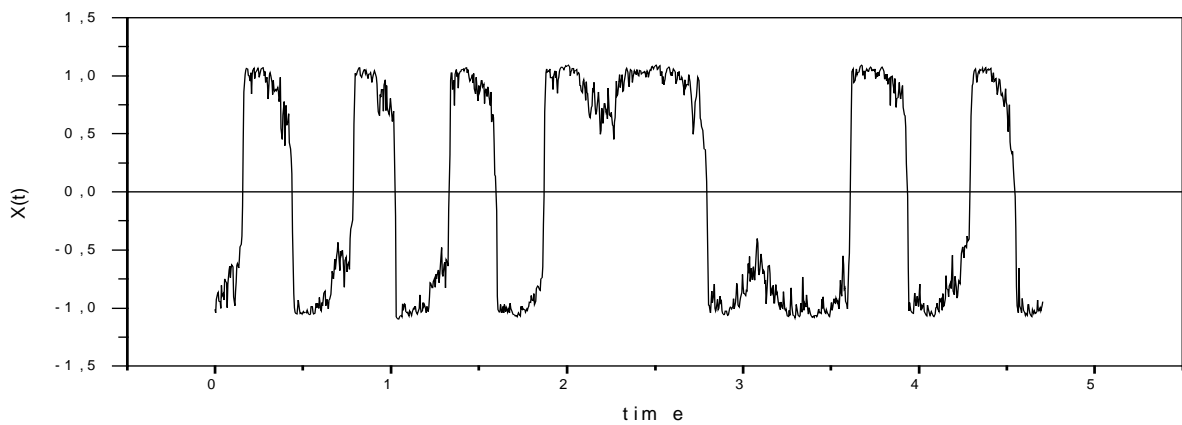
Számunkra azok az esetek jelentősek, melyeknél a külső, additív, periodikus moduláció önmagában nem elég ahhoz, hogy a részecskét az egyik potenciálvölgyből a másikba juttassa. A szóba jöhető frekvenciákon ezek az értékek változnak, minél nagyobb a gerjesztés frekvenciája, annál nagyobb lesz az amplitúdó, melynél a váltás bekövetkezik. Minden esetben ezen érték van megadva, az ez alatti minden amplitúdó számunkra megfelelő. A három különböző gerjesztés esetén a frekvenciákhoz tartozó maximális értékek a Melléklet további táblázataiban találhatóak.

A 3. ábráról jól leolvasható a jelenség lényege, melyet az általam generált jelek segítségével mutatok be. A megfelelően kis frekvencián akkora amplitúdót alkalmazunk, hogy a zaj nélkül a részecske ne legyen képes átjutni az egyik potenciálvölgyből a másikba (a ábra). Amennyiben a rendszerhez adott zaj nem túl nagy, akkor a váltások olyankor következnek be, amikor a részecske a "legközelebb" van a gát széléhez, és a pillanatnyi zajérték megfelelő nagyságú és irányú (b ábra). Amennyiben a zajértéket megfelelően nagyra választjuk, az

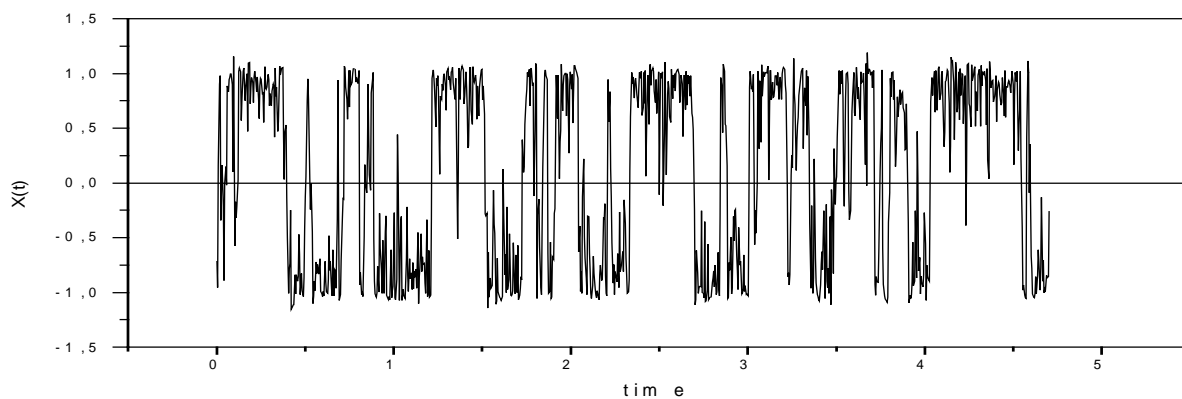
átmenet akármikor megtörténhet, függetlenül attól, hogy a periodikus gerjesztésnek köszönhetően a részecske éppen hol található (c ábra).



a) 0 zajérték



b) 2 zajérték

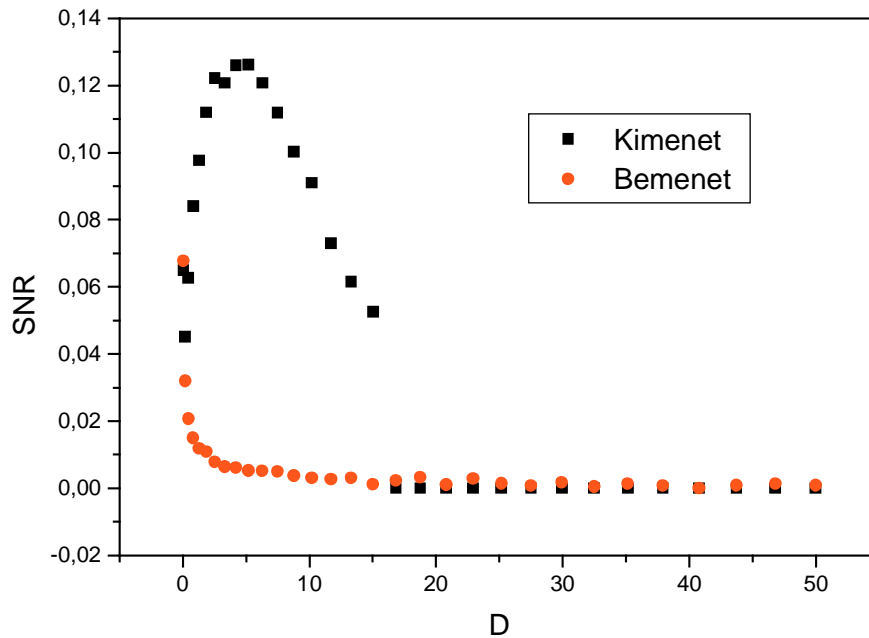


c) 10 zajérték

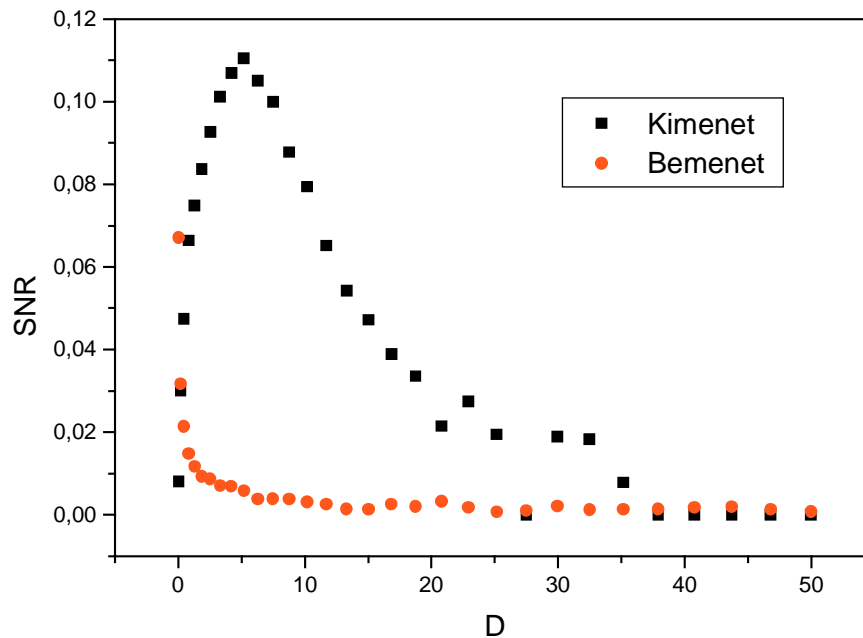
**3.Ábra A modellezésből kapott jelalakok  
1,7-es frekvencia- és 79-es amplitúdóérték estén**



Ezek után már minden adott ahhoz, hogy a sztochasztikus rezonanciát jellemző SNR értéket vizsgáljuk a különböző frekvenciákon. A 4-6.Ábrákon megfigyelhető, hogy az SNR ténylegesen maximummal rendelkezik.

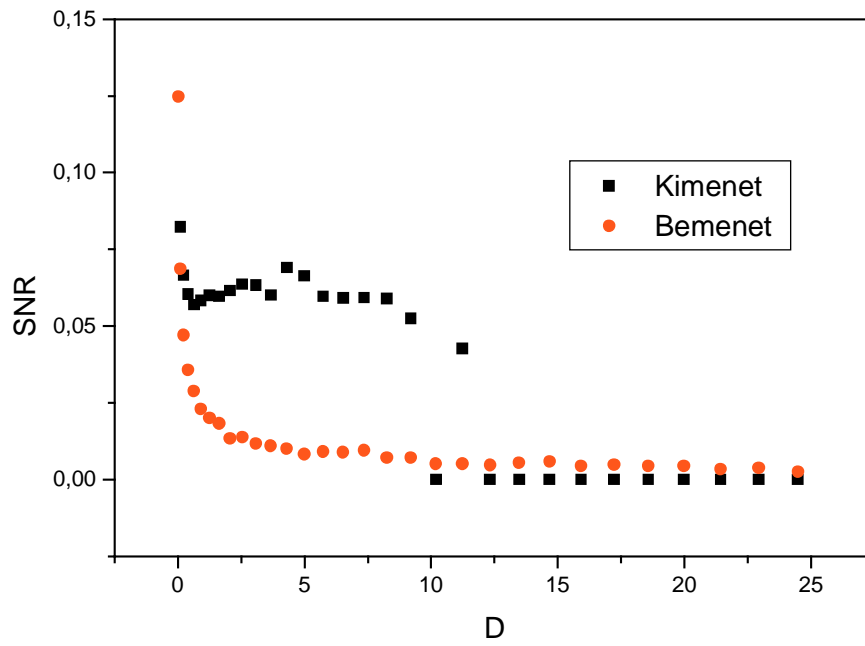


a) Filter nélküli eset

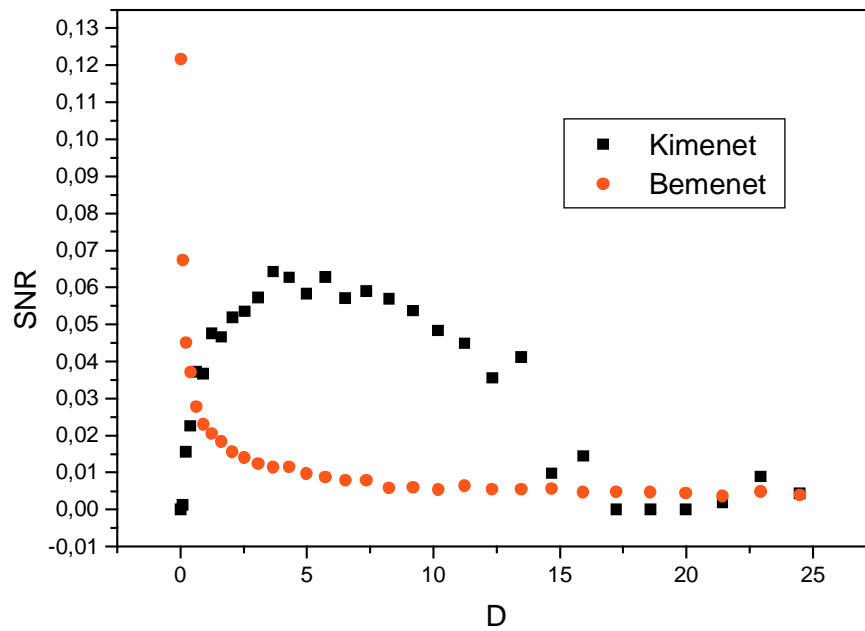


b) Filterezett eset

4.Ábra A jel-zaj viszony alakulása szinuszos gerjesztés esetén

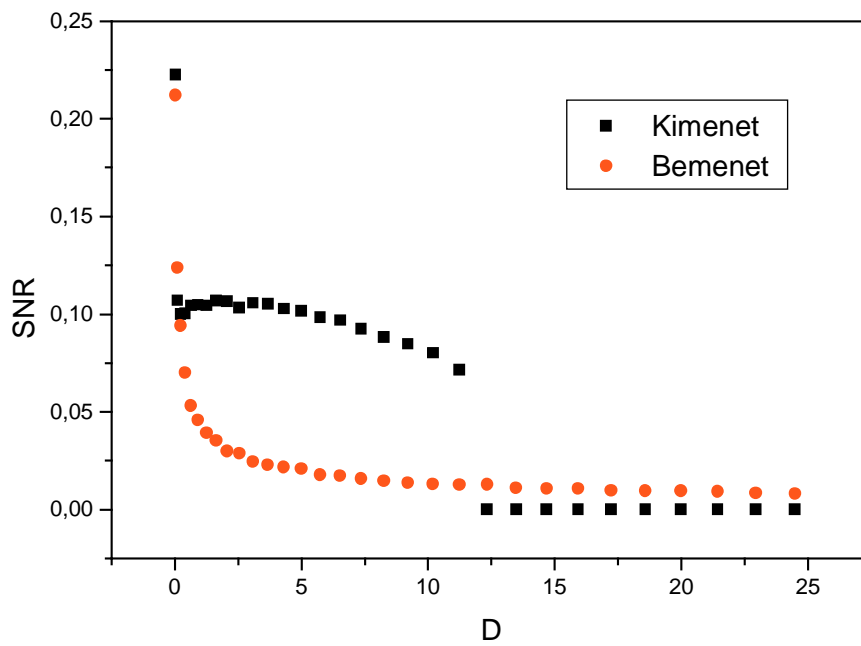


a) Filterezettlen eset

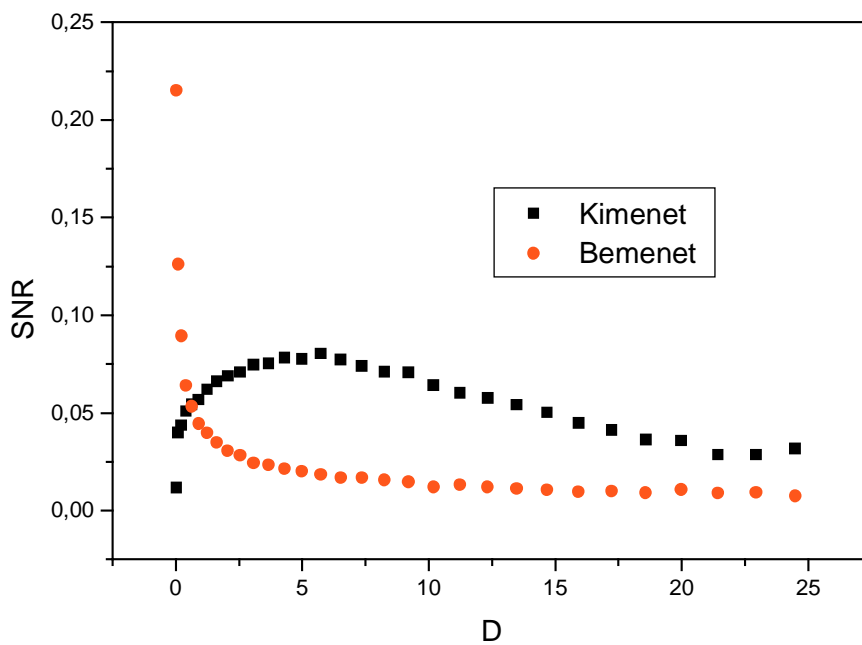


b) Filterezett eset

5.Ábra A jel-zaj viszony alakulása erőlkés gerjesztés esetén



a) Filterezés nélkül

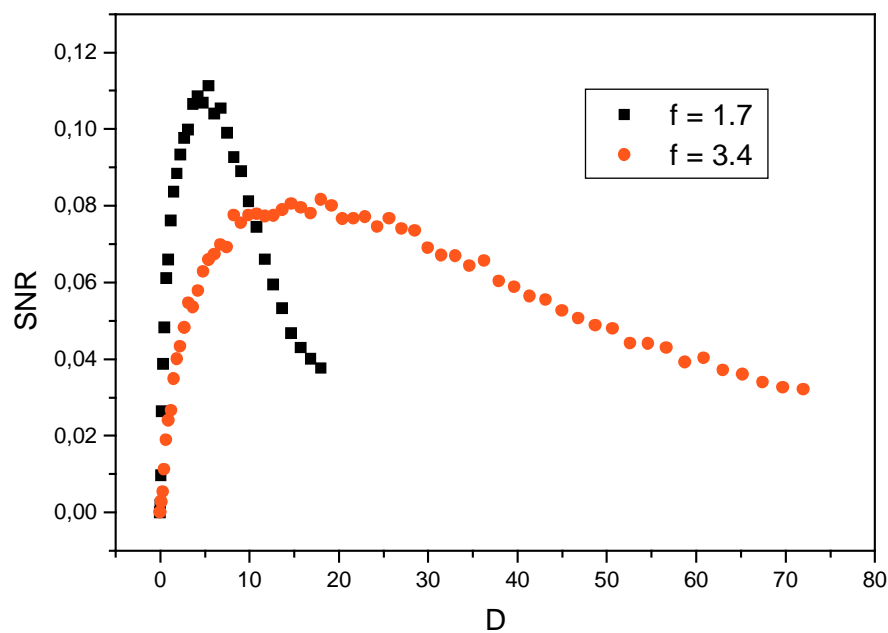


b) Filterezett eset

6.Ábra A jel-zaj viszony alakulása gerjesztés esetén

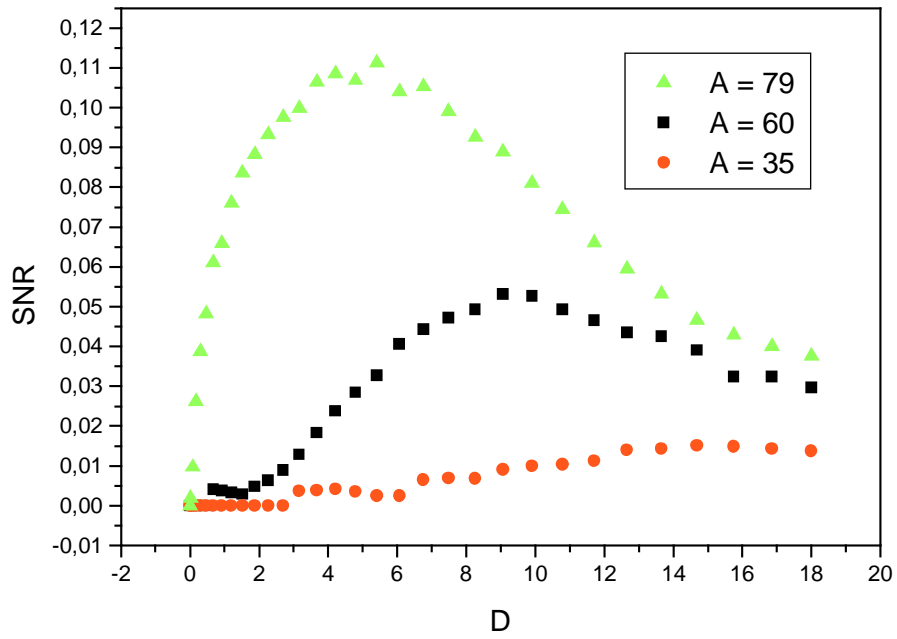
Az is jól leolvasható az ábráról, hogy a filterezetlen esetben a jel-zaj viszony a végtelenbe konvergál, amennyiben a zaj értéke 0-hoz tart.

Az SNR értéke függ a gerjesztés frekvenciájától. Amennyiben a külső gerjesztés amplitúdóját ugyanazon értékre állítjuk, és a frekvenciát növeljük, akkor két megállapítást is tehetünk. Egyrészt az SNR értéke a maximumot később éri el, másrészt ez a maximális érték a növekvő frekvencia felé alacsonyabb. Ezen megállapítások jól leolvashatók a 7.Ábráról, ahol az amplitúdó mindkét görbe esetén 79-re volt állítva.



7.Ábra Az SNR maximumának függése a frekvenciától(f)

Ugyanazon frekvencián vizsgálhatjuk azt, hogyan függ a jel-zaj viszony a külső gerjesztés amplitúdójától. Amennyiben ez az amplitúdó a maximális érték alatt van, mely estén a részecske még ugyanazon potenciálvölgyben marad, a megfigyelések azt mutatták, hogy az SNR érték maximuma csökken a csökkenő amplitúdók szerint. Másrészt az is igaz, hogy a maximum helye a növekvő zajintenzitás irányába tolódik el. Ez érthető is, hiszen ha a külső gerjesztés amplitúdója kisebb, a részecske periodikus mozgása során nem jut olyan közel a gát tetejéhez, vagyis csak nagyobb erőlkés képes átjuttatni a másik állapotba. Ezen eredményeket mutatja a 8.Ábra.



8.Ábra Az SNR maximumának függése a külső gerjesztés amplitúdójától (A)

## 9. Összefoglalás

Ahogy arról már a bevezetésben szó volt, célunk a sztochasztikus rezonancia numerikus modellezése volt. Az előző fejezetben tárgyalt eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy sikerült megalkotni, és megfelelően letesztelni egy olyan programot, mellyel a jelenségét modellezni lehet. Ennek egyik jelentősége abban rejlik, hogy ezzel rendelkezésünkre áll egy módszer, mely leellenőrzötten alkalmas arra, hogy segítségével egy sztochasztikus differenciálegyenletet numerikusan megoldjunk. Ezzel lehetőség adódik arra, hogy bármely más fizikai jelenséget, melyet ilyen típusú egyenlettel írhatunk le, szintén modellezni tudjunk. Ehhez csak a program forrásának minimális átalakítása szükséges. A felhasznált teljesítménysűrűség spektrumot és jel-zaj viszonyt meghatározó algoritmusokat is felhasználhatjuk a későbbiekben.

Számomra azért volt hasznos az elvégzett munka, mert rengeteg új ismerettel gyarapodtam. Egyrészt megismerkedtem a sztochasztikus jelek vizsgálatának alapjaival, a leíráshoz használt függvényekkel, mennyiségekkel. Mindezt egy olyan jelenség vizsgálata közben, melynek gyakorlati felhasználása is jelentős. Ahhoz, hogy a felmerült problémákat megoldhassam, szükség volt ezen folyamatok matematikai leírása alapjainak megismeréséhez, mellyel eddig szintén nem foglalkoztam. Matematikai ismereteim a differenciálegyenletek területén is gyarapodtak, a megismert numerikus módszereket a későbbiekben elem kerülő problémák megoldásában is alkalmazni tudom. Másrészt a numerikus módszerekről eddig szerzett általános ismereteim (hibaszámítás, rend) tovább gyarapodtak, mélyültek.

A programozási folyamat során is gyarapodtak tapasztalataim. Megismerkedtem a Microsoft Visual C/C++ programfejlesztői környezettel, az ebben történő hatékony programozási technikákkal. Sok fejtörést okozott, milyen külalakot kapjon a program, de az ennek kifejlesztésére szánt időt sem érzem kárbaveszettnek.

## 10. Melléklet

### 10.1. A program használata

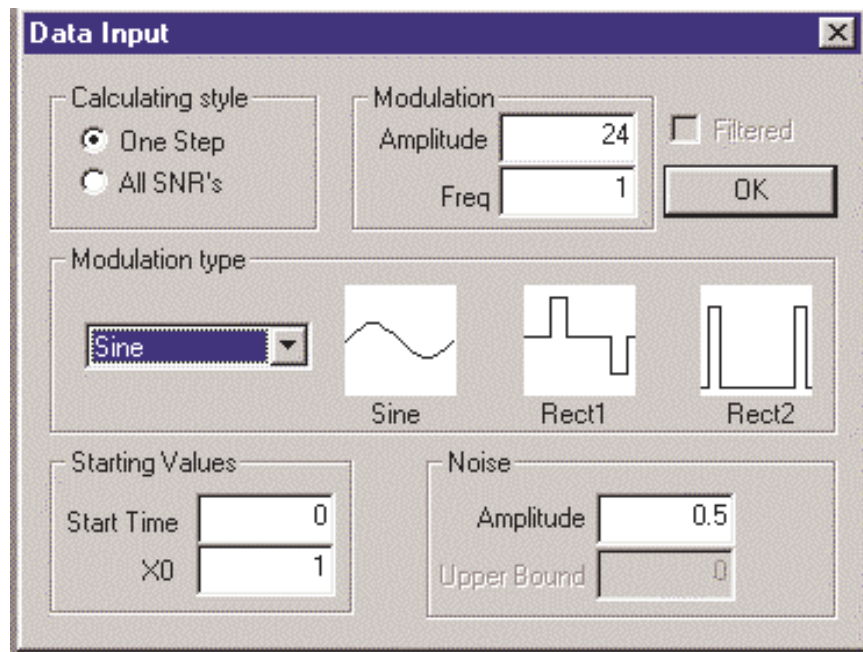
A program Windows95/98 alá készült. Futtatása a Start menü Futtatás (Run) almenüjében nevének begépelésével történhet a névnek tartalmaznia kell az elérési utat is, pl.: C:\stochres.exe). Az indítás után egy “szokásos” ablakot kapunk, melynek menüsorában a **File**, **View** és **Help** főmenüpontok láthatók. A **Help** menüben egyetlen almenüpont található(**About...**), melyre kattintva egy információs ablak jelenik meg.

A **View** főmenüpontban ilyenkor(amennyiben nincs nyitott dokumentum) egyetlen almenüpont található, mely segítségével az úgynevezett **Status Bar** tüntethető el (illetve jeleníthető meg). A **Status Bar** az ablak alján található, azon menüpontokról olvashatunk benne rövid információt, amelyen éppen a kurzor áll, illetve a **Scroll Lock**, **Caps Lock**,és **Num Lock** billentyűk állapotáról ad kijelzést. (Amennyiben ezek közül valamely gomb be van nyomva, nevének első néhány karaktere jelenik meg a megfelelő téglalapban.)

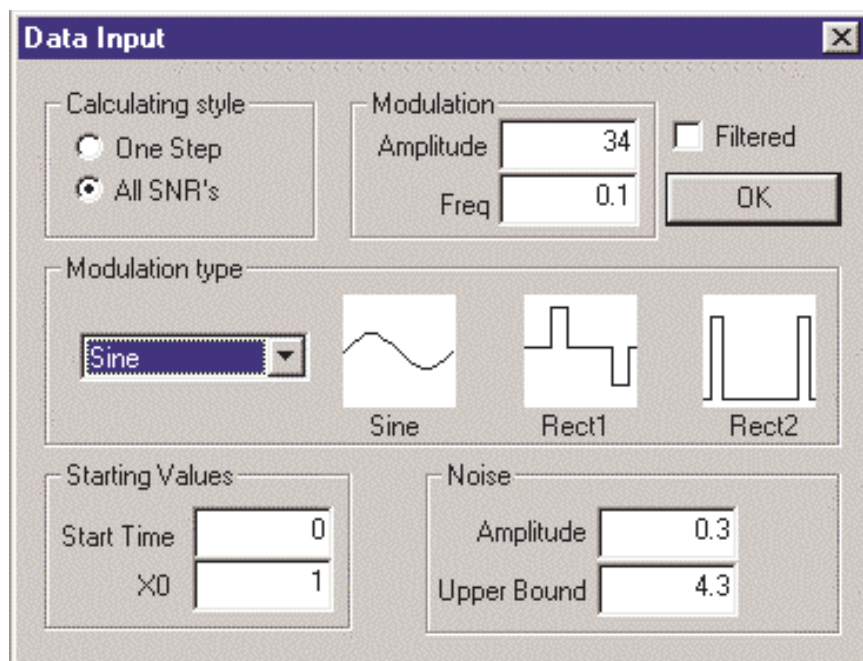
A harmadik főmenüpont a **File**-menü. Itt van lehetőségünk a programból kilépni, erre az **Exit** parancs szolgál. Ha vannak használatban lévő nyitott dokumentumaink, a kilépés előtt a program rákérdez akarjuk-e a munkánkat kimenteni. A mentés hasonlóan végezhető, mint például a Word program esetén. (A könyvtárstruktúrában kikereshetjük a könyvtárat, ahová menteni akarunk, és természetesen megadhatjuk a file nevét is. Ha szükséges új könyvtárat is létrehozhatunk.) Ezen menü alatt tölthetünk be már régebben kimentett dokumentumokat, az **Open** almenüpont választásával.

Amennyiben új dokumentumot kívánunk létrehozni, a 9.Ábrán látható ablak jelenik meg, mely a megfelelő beállítások elvégzésére szolgál. Lehetőségünk van arra, hogy egyetlen “mérést” demonstráljunk (a ábra), illetve egy teljes mérési sorozatot a zajamplitúdók növelésével kapott SNR értékek kiszámítására (b ábra). Ennek kiválasztása az ablak bal felső sarkában található két gomb valamelyikének lenyomásával történhet.

Vannak paraméterek, melyek beállítását mindkét esetben meg kell tennünk. Ilyenek a kezdeti feltételek (**Starting Values**), melyek a kezdeti kitérést (**X0**), illetve a megfigyelés kezdetének időpillanatát (**Starting Time**) jelentik. Ezen paramétereknek tulajdonképpen túl nagy jelentőségük nincsen, ugyanis a kezdeti tranziens szakaszokat úgyis levágjuk.



a) Egy mérés választása



b) Mérési sorozat választása

9.Ábra Az adatbeviteli ablak



A potenciált moduláló tag beállítása két lépésből állhat. Elsősorban beállíthatjuk a moduláció típusát (**Modulation type**). A három különböző típust az ábrák definiálják, kiválasztásuk a mellettük lévő úgynevezett Combo Box segítségével történhet. Itt a három felsorolt névből az egér segítségével választhatjuk ki a nekünk megfelelőt. Ezek után a moduláció frekvenciáját (**Freq**) és amplitúdóját (**Amplitude**) állíthatjuk be. Oda kell figyelniük arra, hogy a frekvenciát abban az esetben se állítsuk nullára, amennyiben csak a zajjal akarjuk modulálni a rendszert, mert a numerikus számításához szükséges beosztást ezen érték alapján határozzuk meg. Az időbeosztás mindig az  $\frac{1}{128 \cdot \text{Freq}}$  képlet alapján van kiszámítva.

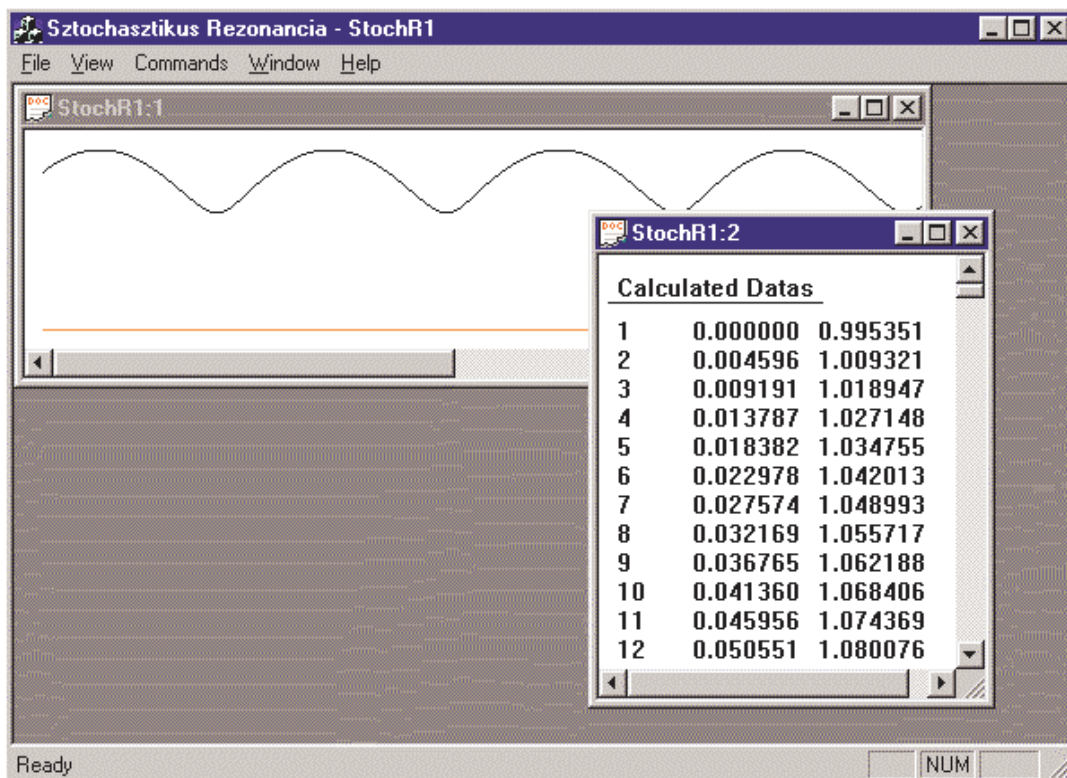
Amennyiben egy mérés demonstrálását választjuk, az egyetlen dolog, amit még be kell állítanunk a zaj amplitúdója. Ez igazából egy konstanst jelent, mellyel a  $\xi(t)$  fehér zaj be van szorozva. A zaj előállítási módja miatt ez nem a valós intenzitást jelenti. Mindenesetre a beállított konstans lineáris hatással van a zaj értékére.

Amennyiben egy teljes mérési sorozatot kívánunk lefuttatni, a zaj amplitúdójára nem egyetlen értéket kell megadnunk, hanem egy intervallumot. Ennek alsó határát az **Amplitude**, felső határát pedig az **UpperBound** mezőkben adhatjuk meg. Ilyenkor lehetőségünk van arra is, hogy kiválasszuk, a kétállapotú, vagy a teljes dinamikát használó modellt akarjuk-e alkalmazni. Ennek eldöntése a jobb felső sarokban található **Filtered** kapcsoló segítségével történhet. Ezt "beikszelve", a numerikusan kiszámított részecske pályát alakítjuk át a következők szerint: az új érték +1, amennyiben a részecske a jobb oldali gödörben tartózkodik és -1 amennyiben a baloldali gödörben. Ez felel meg a kétállapotú modellnek. Ha megtettük a megfelelő beállításokat, akkor az **OK** gomb lenyomásával elindíthatjuk a rendszert.

Ennek hatására új menüpontok jelennek meg a főablak felső részén (**Commands**, **Window**), a **File** és **View** menük új almenüpontokkal bővülnek, valamint megnyílik egy az eredményeket tartalmazó gyermek-ablak, melyet dokumentumablaknak nevezünk.

A **File** menüben nyitott dokumentum esetén lehetőség van ezen dokumentum elmentésére a **Save** és a **Save As** menüpontok segítségével. A **Save** opció a dokumentum első mentésekor rákérdez, milyen néven kívánjuk a mentést megtenni, de előzőleg valamilyen néven már mentett dokumentum esetén ezt nem teszi meg, hanem a régi néven ment. A **Save As** használatakor mindig adhatunk meg új nevet. Ha egy dokumentumot már nem akarunk használni, a **Close** parancs segítségével csukhatjuk le.

A **View** menüpontban új lehetőség ilyenkor, hogy a kiszámított adatokat grafikusán ábrázolva (**Graphical**), avagy táblázatszerűen vizsgálhatjuk meg (**Numerical**). A táblázat első oszlopa a sorszám, a második a vízszintes tengely beosztása, a harmadik pedig az egyes beosztásokhoz tartozó értékek.



10.Ábra Grafikus és numerikus kijelzés, One Step módban

Ugyanazon adathalmaz kétféle megjelenítése egyszerre is megtehető (ahogyan az a 10.Ábrán látható), erre a **Window** menüpont **New Window** alpontja ad lehetőséget. Ennek segítségével ugyanazon dokumentumhoz hozhatunk létre egy újabb ablakot, tehát amennyiben a dokumentumban az adatok megváltoznak, mindkét ablakban megjelenik a változás. A **Window**

menüpont további alpontjaival a nyitott dokumentumok főablakbani elhelyezkedését változtathatjuk meg, a következők szerint:

**Cascade** – a nyitott ablakokat kártyaszerűen szétterítve bal fentről haladva helyezhetjük sorba

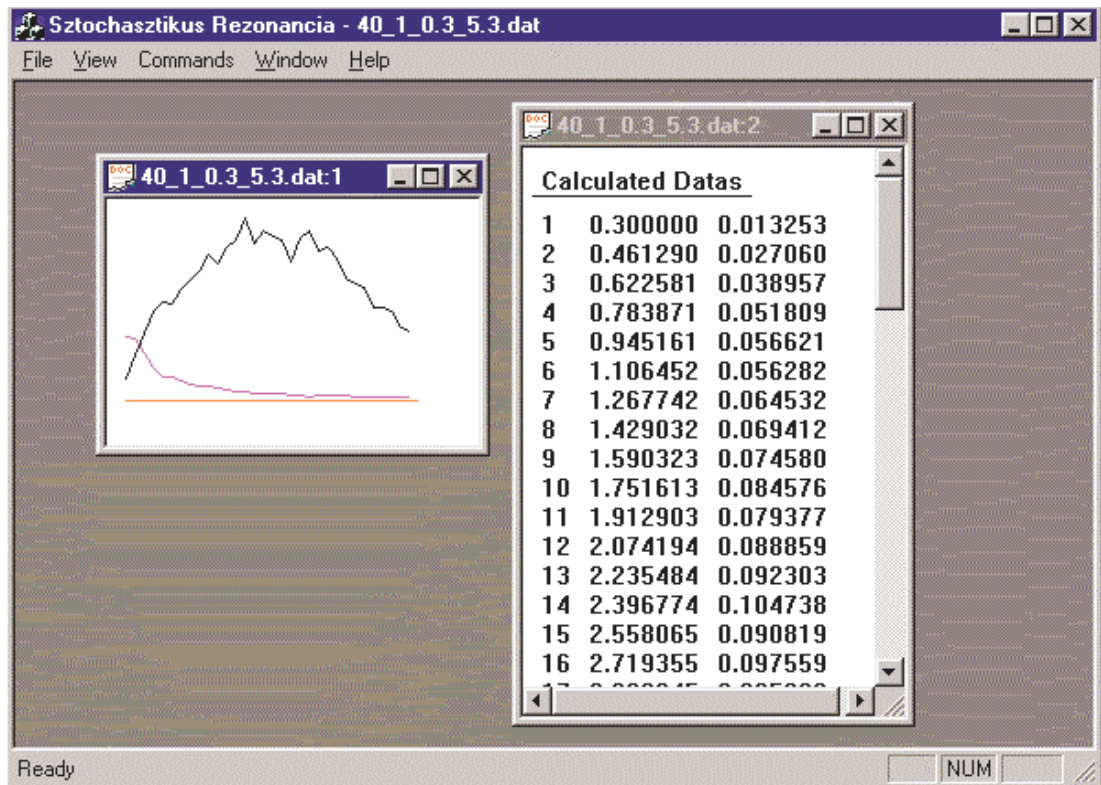
**Tile** – a nyitott ablakokat úgy rendezhetjük sorba, hogy a főablakot teljesen kitöltsék, és egymást ne fedjék

**Arrange Icons** – az ikonná kicsinyített ablakokat rendezi sorba

Szintén a **Window** menüben megtalálhatjuk az összes nyitott ablak neveit, melyek közül mindig az az aktuális, amely mellett a pipa látható. Ez egyszerű “klikkeléssel” helyezhető át valamelyik másik ablakra, ezzel azt téve aktuálissá.

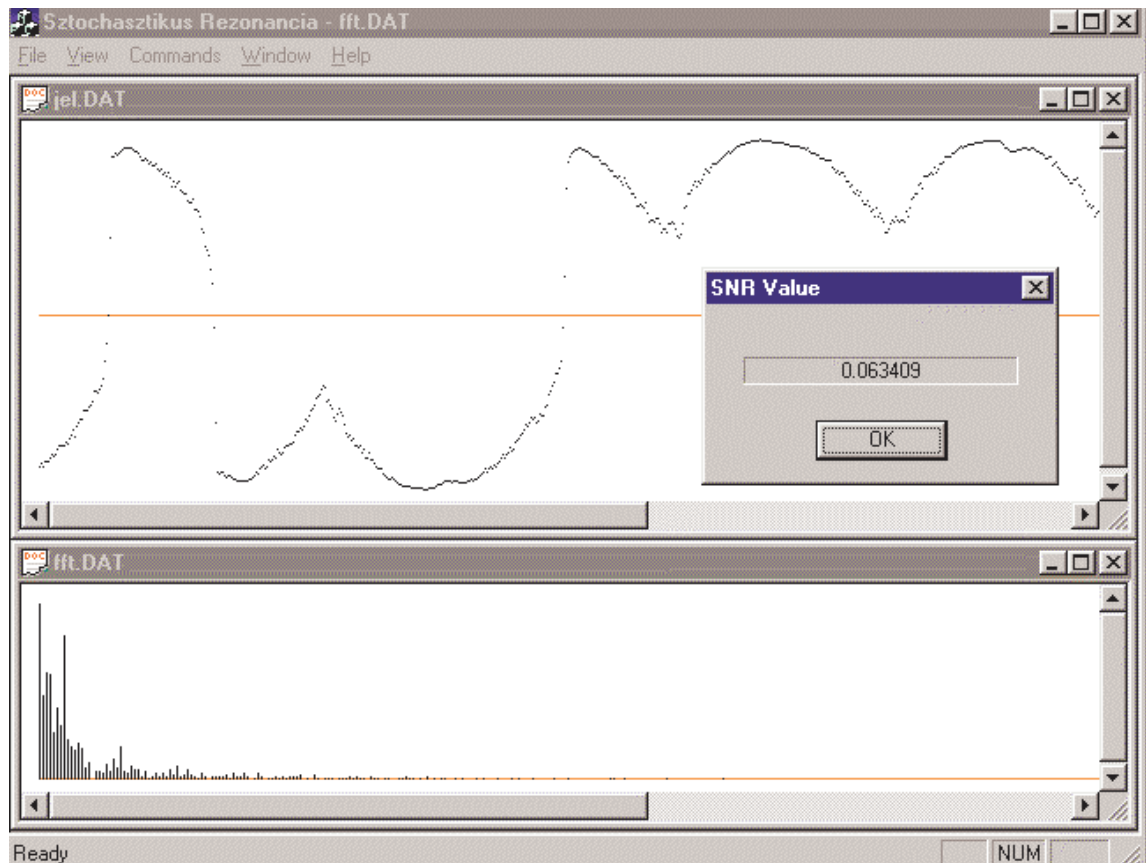
Amennyiben egy teljes mérési sorozatot reprodukálunk (**All SNR's**), a dokumentum feltöltése hosszabb ideig tart. Ez az idő attól is függ, mekkora frekvencián dolgozunk (kisebb frekvenciákon hosszabb idő szükséges), minimuma néhány perc. A számítási fázisban nyomon követhetjük, hol tartunk éppen (a munka hány százalékával készültünk el), a **Status Bar** segítségével. A feltöltött dokumentumban mind a kimeneti, mind a bemeneti jel-zaj viszonyt megjelenítjük. A kimeneti SNR feketével, a bemeneti lilával van ábrázolva. Természetesen ilyenkor is lehetőség van a numerikus megjelenítésre.

Egyetlen mérés demonstrálása esetén (**One Step**) mivel csak egyetlen megfigyeléshez tartozó jelalakot számítunk ki, a dokumentum feltöltése a legrosszabb esetben is csak néhány másodpercig tart. Ezek után egy kitérés-idő függvény áll rendelkezésünkre, egy ilyen láthattunk egyébként a 10.Ábrán. Ez persze tartalmazza az adott völgyön belüli mozgás történetét is. Amennyiben erre nincs szükségünk, vagyis ha a kétállapotú modellt akarjuk használni, akkor a **Commands** menü **Filter** menüpontját használhatjuk. Ezzel azonban felülírjuk a dokumentumhoz tartozó adatokat, tehát amennyiben ezekre később szükségünk lesz, először mentenünk kell.



11.Ábra Grafikus és numerikus kijelzés, All SNR's módban

Ahogy arról már szó volt, a sztochasztikus rezonancia bemutatásához szükségünk van a teljesítmény-spektrumra. Ennek meghatározására szolgál a **Commands** menü **FFT** menüpontja. Ez a parancs szintén felülírja az aktuális dokumentum adatait, tehát előtte érdemes menteni. A teljesítmény-spektrum megtekintése szintén mindkét "alakban" megtehető (grafikus, illetve numerikus).



12.Ábra Zajjal terhelt jel, Fourier transzformáltja, valamint az SNR-ablak

A teljesítményspektrumból a jel-zaj viszony a **Commands** menü **SNR** menüpontjának segítségével számítható. A kapott eredmény egy dialógus-abakban jelenik meg. A 12.Ábrán felül a numerikusan meghatározott jelalak, alatta az ezen jelből kiszámított teljesítmény-spektrum, valamint az SNR látható.

Ezzel minden tudás rendelkezésünkre áll, hogy a programot gond nélkül használni tudjuk.

## 10.2. Táblázatok

A frekvenciákhoz(fr) tartozó maximális zajegyűthetők(d), melyek esetén még nem történik számolási hiba

Fr	d	Fr	d
1.700000	7.000000	5.900000	34.000000
1.800000	10.500000	6.000000	34.500000
1.900000	11.000000	6.100000	34.500000
2.000000	11.000000	6.200000	35.000000
2.100000	11.500000	6.300000	35.500000
2.200000	12.000000	6.400000	36.000000
2.300000	12.500000	6.500000	36.500000
2.400000	13.000000	6.600000	37.000000
2.500000	14.000000	6.700000	38.000000
2.600000	14.500000	6.800000	38.500000
2.700000	15.500000	6.900000	38.500000
2.800000	16.000000	7.000000	39.000000
2.900000	16.500000	7.100000	39.000000
3.000000	17.000000	7.200000	39.500000
3.100000	17.000000	7.300000	40.500000
3.200000	17.500000	7.400000	41.000000
3.300000	17.500000	7.500000	42.000000
3.400000	18.000000	7.600000	42.500000
3.500000	18.500000	7.700000	43.500000
3.600000	18.500000	7.800000	44.000000
3.700000	19.000000	7.900000	44.500000
3.800000	20.000000	8.000000	45.000000
3.900000	20.500000	8.100000	45.500000
4.000000	21.000000	8.200000	46.000000
4.100000	22.000000	8.300000	46.000000
4.200000	22.500000	8.400000	46.500000
4.300000	24.000000	8.500000	46.500000
4.400000	25.500000	8.600000	47.000000
4.500000	26.000000	8.700000	47.500000
4.600000	27.000000	8.800000	49.000000
4.700000	27.000000	8.900000	49.500000
4.800000	27.500000	9.000000	50.000000
4.900000	28.500000	9.100000	50.000000
5.000000	29.000000	9.200000	50.500000
5.100000	29.500000	9.300000	51.000000
5.200000	29.500000	9.400000	51.500000
5.300000	30.500000	9.500000	52.000000
5.400000	31.000000	9.600000	52.500000
5.500000	32.000000	9.700000	53.500000
5.600000	32.500000	9.800000	54.000000
5.700000	32.500000	9.900000	55.000000
5.800000	33.000000	10.000000	56.000000

A frekvenciákhoz(fr) tartozó amplitudók(A), melyek esetén a részecske még nem vált a két potenciálvölgy között, a szinuszos gerjesztés esetén.

Fr	A	Fr	A
1.700000	80.500000	5.900000	90.000000
1.800000	80.500000	6.000000	90.500000
1.900000	81.000000	6.100000	90.500000
2.000000	81.000000	6.200000	91.000000
2.100000	81.000000	6.300000	91.000000
2.200000	81.500000	6.400000	91.500000
2.300000	81.500000	6.500000	91.500000
2.400000	82.000000	6.600000	92.000000
2.500000	82.000000	6.700000	92.000000
2.600000	82.500000	6.800000	92.500000
2.700000	82.500000	6.900000	92.500000
2.800000	83.000000	7.000000	93.000000
2.900000	83.000000	7.100000	93.000000
3.000000	83.500000	7.200000	93.500000
3.100000	83.500000	7.300000	93.500000
3.200000	83.500000	7.400000	94.000000
3.300000	84.000000	7.500000	94.000000
3.400000	84.000000	7.600000	94.500000
3.500000	84.500000	7.700000	94.500000
3.600000	84.500000	7.800000	95.000000
3.700000	85.000000	7.900000	95.000000
3.800000	85.000000	8.000000	95.500000
3.900000	85.500000	8.100000	95.500000
4.000000	85.500000	8.200000	96.000000
4.100000	86.000000	8.300000	96.000000
4.200000	86.000000	8.400000	96.500000
4.300000	86.000000	8.500000	96.500000
4.400000	86.500000	8.600000	97.000000
4.500000	86.500000	8.700000	97.000000
4.600000	87.000000	8.800000	97.500000
4.700000	87.000000	8.900000	97.500000
4.800000	87.500000	9.000000	98.000000
4.900000	87.500000	9.100000	98.000000
5.000000	88.000000	9.200000	98.500000
5.100000	88.000000	9.300000	98.500000
5.200000	88.500000	9.400000	99.000000
5.300000	88.500000	9.500000	99.000000
5.400000	89.000000	9.600000	99.500000
5.500000	89.000000	9.700000	99.500000
5.600000	89.500000	9.800000	100.000000
5.700000	89.500000	9.900000	100.000000
5.800000	90.000000	10.000000	100.500000

A frekvenciákhoz(fr) tartozó amplitudók(A), melyek esetén a részecske még nem vált a két potenciálvölgy között, a rect1 típusú gerjesztés esetén.

Fr	A	Fr	A
1.700000	111.500000	5.900000	240.500000
1.800000	114.000000	6.000000	244.000000
1.900000	117.000000	6.100000	247.000000
2.000000	120.000000	6.200000	250.000000
2.100000	123.000000	6.300000	253.500000
2.200000	126.000000	6.400000	256.500000
2.300000	129.000000	6.500000	259.500000
2.400000	132.000000	6.600000	263.000000
2.500000	135.000000	6.700000	266.000000
2.600000	138.000000	6.800000	269.000000
2.700000	141.000000	6.900000	272.500000
2.800000	144.000000	7.000000	275.500000
2.900000	147.000000	7.100000	278.500000
3.000000	150.000000	7.200000	282.000000
3.100000	153.000000	7.300000	285.000000
3.200000	156.500000	7.400000	288.000000
3.300000	159.500000	7.500000	291.500000
3.400000	162.500000	7.600000	294.500000
3.500000	165.500000	7.700000	297.500000
3.600000	168.500000	7.800000	301.000000
3.700000	171.500000	7.900000	304.000000
3.800000	175.000000	8.000000	307.500000
3.900000	178.000000	8.100000	310.500000
4.000000	181.000000	8.200000	313.500000
4.100000	184.000000	8.300000	317.000000
4.200000	187.500000	8.400000	320.000000
4.300000	190.500000	8.500000	323.000000
4.400000	193.500000	8.600000	326.500000
4.500000	196.500000	8.700000	329.500000
4.600000	200.000000	8.800000	332.500000
4.700000	203.000000	8.900000	336.000000
4.800000	206.000000	9.000000	339.000000
4.900000	209.000000	9.100000	342.000000
5.000000	212.500000	9.200000	345.500000
5.100000	215.500000	9.300000	348.500000
5.200000	218.500000	9.400000	352.000000
5.300000	222.000000	9.500000	355.000000
5.400000	225.000000	9.600000	358.000000
5.500000	228.000000	9.700000	361.500000
5.600000	231.500000	9.800000	364.500000
5.700000	234.500000	9.900000	367.500000
5.800000	237.500000	10.000000	371.000000



A frekvenciákhoz(fr) tartozó amplitudók(A), melyek esetén a részecske még nem vált a két potenciálvölgy között, a rect2 típusú gerjesztés esetén.

Fr	A	Fr	A
1.700000	79.500000	5.900000	103.500000
1.800000	80.500000	6.000000	104.500000
1.900000	81.000000	6.100000	105.000000
2.000000	81.000000	6.200000	105.500000
2.100000	81.500000	6.300000	106.500000
2.200000	82.000000	6.400000	107.000000
2.300000	82.500000	6.500000	108.000000
2.400000	83.000000	6.600000	108.500000
2.500000	83.500000	6.700000	109.500000
2.600000	84.000000	6.800000	110.000000
2.700000	84.500000	6.900000	110.500000
2.800000	85.000000	7.000000	111.500000
2.900000	85.500000	7.100000	112.000000
3.000000	86.000000	7.200000	113.000000
3.100000	86.500000	7.300000	113.500000
3.200000	87.000000	7.400000	114.500000
3.300000	87.500000	7.500000	115.000000
3.400000	88.000000	7.600000	116.000000
3.500000	88.500000	7.700000	116.500000
3.600000	89.000000	7.800000	117.500000
3.700000	89.500000	7.900000	118.000000
3.800000	90.500000	8.000000	119.000000
3.900000	91.000000	8.100000	119.500000
4.000000	91.500000	8.200000	120.500000
4.100000	92.000000	8.300000	121.000000
4.200000	92.500000	8.400000	122.000000
4.300000	93.000000	8.500000	122.500000
4.400000	94.000000	8.600000	123.500000
4.500000	94.500000	8.700000	124.500000
4.600000	95.000000	8.800000	125.000000
4.700000	95.500000	8.900000	126.000000
4.800000	96.500000	9.000000	126.500000
4.900000	97.000000	9.100000	127.500000
5.000000	97.500000	9.200000	128.000000
5.100000	98.500000	9.300000	129.000000
5.200000	99.000000	9.400000	130.000000
5.300000	99.500000	9.500000	130.500000
5.400000	100.500000	9.600000	131.500000
5.500000	101.000000	9.700000	132.000000
5.600000	101.500000	9.800000	133.000000
5.700000	102.500000	9.900000	134.000000
5.800000	103.000000	10.000000	134.500000

## 11. Felhasznált irodalom

- Dr. Schnell László - Jelek és rendszerek mérés technikája  
Műszaki könyvkiadó, Budapest 1985.
- Frank Moss - Stochastic Resonance: From the Ice Ages to the Monkey's ear  
Frontiers in Applied Mathematics (SIAM, Philadelphia, 1992.)
- Ludwig Arnold - Sztochasztikus Differenciálegyenletek, elmélet és alkalmazás  
Műszaki könyvkiadó, Budapest 1984.
- Móricz Ferenc - Differenciálegyenletek numerikus módszerei  
POLYGON, Szeged 1998.

## 12. Referenciák

1. R. Benti, S. Sutura and A. Vulpiani, J. Phys. A 14, L453 (1981)
2. (a) J-P. Eckmann, L. Thomas and P. Wittwer, J. Phys. A. 14, 3153 (1981)  
(b) J-P. Eckmann and L. E. Thomas, J. Phys. A. 15, L261 (1982)
3. (a) R. Benzi, G. Parisi, A. Sutura and A. Vulpiani, Tellus 34, 10 (1982)  
(b) R. Benzi, G. Parisi, A. Sutura and A. Vulpiani, SIAM, J. Appl. Math. 43, 565 (1983)  
(c) A. Sutura, Quart. J. Roy. Metreol. Soc. 107,137 (1981)
4. (a) C. Nicolis and G. Nicolis, Tellus 33, 225 (1981)  
(b) C. Nicolis, Tellus 34, 1 (1982)
5. S. Fauve and F. Heslot, Phys. Lett. 97A, 5 (1983)
6. B. Carolli, C. Carolli, B. Roulet and D. Saint-James, Physica A 108, 233 (1981)
7. P. Bryant, K. Wiesenfeld and B. McNamara, J. Appl. Phys. 62, 2898 (1987)
8. B. McNamara and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A 39, 4854 (1989)

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Dr. Gingl Zoltánnak,  
a munkámban nyújtott elengedhetetlen segítségéért