

*Sztochasztikus rezonancia a
FitzHugh-Nagumo-féle
neuron modellben*

Diplomamunka

Készítette: Fülei Tamás

Témavezető: Dr. Gingl Zoltán
egyetemi adjunktus

*Szegedi Tudományegyetem
Kísérleti Fizikai Tanszék*

Szeged, 2002

Tartalom

1. Bevezetés	3
2. Elméleti áttekintés	5
2.1. A sztochasztikus rezonancia	5
2.2. A zajok jellemzése és matematikai leírása	10
2.3. Fizikai zajok és osztályozásuk	17
3. Az idegsejtről általában	22
3.1. A FitzHugh-Nagumo-féle neuron modell	24
4. A FitzHugh-Nagumo-féle neuron modell szimulációs vizsgálata	26
4.1. Differenciálegyenletek numerikus megoldása	26
4.2. Az FHN modell numerikus szimulációja	27
4.3. A numerikus szimuláció eredményei	29
5. Differenciálegyenletek megoldása analóg számítógéppel	39
5.1. Az FHN egyenletrendszer analóg számítógépes szimulációja	43
5.2. Analóg számítógépes szimuláció eredményei	47
6. Összefoglalás	51
7. Köszönetnyilvánítás	52
8. Függelék	53
9. Irodalomjegyzék	57

1. Bevezetés

Az idegrendszer, illetve egyetlen idegsejt működése igen bonyolult. Az erre vonatkozó élettani kutatások mellett hatékonyak bizonyul az idegsejt számítógépes szimulációja is. Az emberi idegrendszerben mintegy tízmilliárd idegsejt van. Az idegsejtek élettanából ismeretes, hogy az ingerekre a határát alkotó membránokban levő csatornák nyitásával vagy zárásával, azaz be- és kifolyó ionáramok generálásával reagál [1]. Ezek az áramok a sejt belső állapotának, membránpotenciáljának megváltozásához, megfelelő körülmények között akcióspotenciál generálásához (a sejt ún. „tüzeléséhez”) vezetnek. Napjainkban úgy az idegsejt szerkezetét, mint az idegsejt által generált és kibocsátott jelek mechanizmusait kezdjük olyan részletességgel megismerni, hogy egy idegsejt modellezése külön tudományággá kezdi kinőni magát. Nagy figyelmet fordítanak arra az érdekes jelenségre is, mely az akcióspotenciál generálásával hozható kapcsolatba. Hogyan lehet ugyanis az, hogy az idegsejt az ingerküszöb alatti gyenge determinisztikus jeleket bizonyos körülmények között érzékelni képes? Erre egy lehetséges válasz a sztochasztikus rezonancia (SR) jelenségében rejlik. Mit is jelent ez? Bizonyos nemlineáris rendszereknél tapasztalható, hogy a rendszer gyenge jelre adott válaszát egy jelenlevő bizonyos zajszint felerősíti. Mivel zaj mindenhol, így biológiai rendszerekben is fellép, ezért a sztochasztikus rezonancia magyarázat lehet a fentebb említett kérdésre. Természetesen többféle zajtípust ismerünk, így felmerül a kérdés, milyen fajta zajjal valósul meg a leghatékonyabban ez a jelenség.

Ezzel kapcsolatban, egy 1998-ban megjelent cikk [2] – melynek szerzői numerikus szimulációt alkalmaztak – a FitzHugh-Nagumo-féle neuron modell (FHN) esetében az $1/f$ zajnak kiemelt szerepet tulajdonít a többi zajjal szemben. Ez a szerzők szerint szemléletesen azt jelenti, hogy $1/f$ zajt alkalmazva már kisebb zaj amplitúdóknál maximumot mutat a kimeneten mérhető jel/zaj viszony (SNR) a zaj amplitúdójának függvényében.

Dolgozatomban célul tűztem ki:

- A FitzHugh-Nagumo-féle neuron modellben létrejövő sztochasztikus rezonancia vizsgálatát többféle zajtípusra kiterjesztve: $1/f^\beta$ ($\beta=0; 0.25; 0.5; 0.75; \dots; 2$), és Lorentzi zajra is;
- Az FHN modellt megoldó numerikus és az annál reálisabb analóg szimuláció és mérés megvalósítását;
- A kapott eredmények segítségével az $1/f$ zaj kiemelt szerepére vonatkozó állítás magyarázatát, kiegészítését, illetve módosítását.

2. Elméleti áttekintés

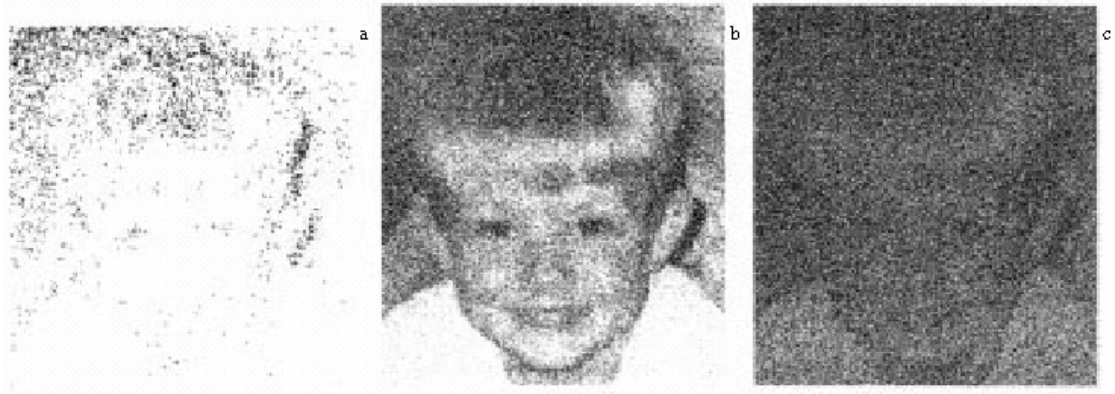
2.1. A sztochasztikus rezonancia (SR) [3,4]

Sztochasztikus rezonanciáról beszélünk akkor, amikor egy rendszer gyenge jelre adott válaszát a jelhez kevert sztochasztikus zaj képes felerősíteni. Másképpen fogalmazva azt mondhatjuk, hogy ha egy rendszert gyenge determinisztikus jellel és zajjal gerjesztünk, akkor a kimeneten mérhető jel/zaj viszony a zaj szórásának függvényében egy rezonancia jellegű görbét ad. Meg kell jegyeznünk, hogy az ilyen rendszerek szükségképpen nemlineáris rendszerek.

Eredetileg az 1980-as évek elején Benzi és munkatársai vezették be a sztochasztikus rezonancia fogalmát a periodikusan – átlagosan 100000 évente – visszatérő jégkorszakok kapcsán [3]. Az első kísérleti bizonyítékot Fauve és Heslot Schmitt-triggerrel folytatott kísérletei szolgáltatták [3].

A sztochasztikus rezonancia ma már számos tudományterületen ismert, például: lézerekben, kaotikus, nemdinamikai, biológiai rendszerekben, különböző technikai és műszaki alkalmazásoknál [5] stb.

Példaként említhetünk egy a sztochasztikus rezonancián alapuló képminőség javító eljárást, amit *dithering*-nek neveznek. Ha egy alulexponált digitalizált kép pontjaihoz zajt keverünk, akkor javítható a kép minősége. Az 1.a ábrán van az alulexponált rossz minőségű digitalizált kép [5]. Ebből a képből zaj hozzáadásával áll elő az 1.b ábrán látható kép. Ha viszont túl sok a hozzákevert zaj, a kép minőségét el is ronthatja. Azt mondhatjuk, hogy csak egy optimális zaj mennyiség eredményez megfelelő minőségű képet.



a

b

c

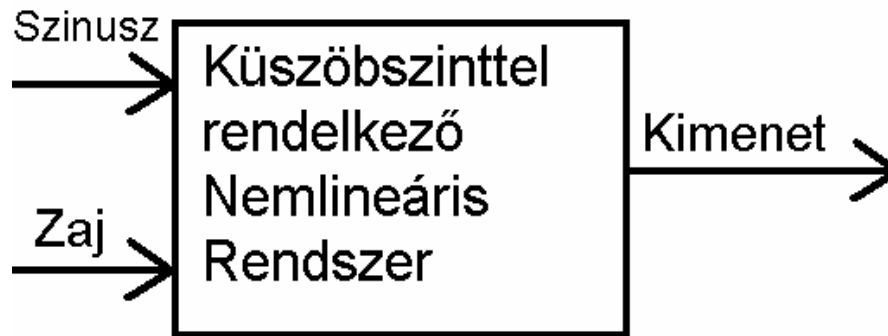
Példa a dithering eljárásra
1. ábra

Nagy figyelem irányul a sztochasztikus rezonancia jelenségére a biológiai érzékelési folyamatok kutatásában. Például a rák hidrodinamikai érzékelő mechanoreceptorai zaj jelenlétében (a vízben keletkező turbulanciák) detektálni képesek a távolból közeledő ragadozó hal farka által keltett közel periodikus gyenge vízmozgást [5,6]. Másik példaként említhető a tücsök. A tücsök légmozgást érzékelő receptorai „zajos” környezetben (fluktuáló légmozgás) érzéklni képesek a távoli darázs szárnyai által keltett légvibrációt.

Az előbb említett rendszerek, és minden olyan rendszer, ahol a sztochasztikus rezonanciát megfigyelték, három alapvető tulajdonsággal rendelkezik:

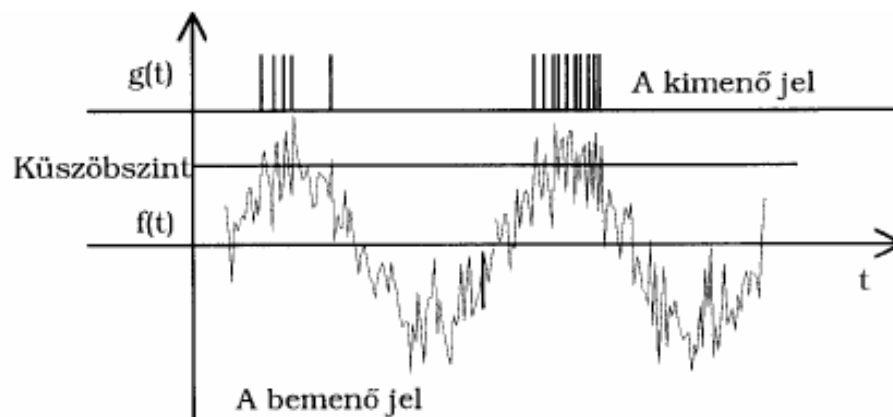
1. Fellelhető bennük egy meghatározott **küszöbszint**;
2. A gerjesztő determinisztikus jel **gyenge** (küszöb alatti);
3. Jelen van egy **zajforrás**, melynek zaja hozzáadódik a gerjesztő jelhez.

Példaként képzeljünk el egy olyan egyszerű küszöbszinttel rendelkező nemlineáris rendszert (2. ábra.), mely a küszöbszintet meghaladó gerjesztés hatására valamilyen választ ad (egy impulzust) (3. ábra).



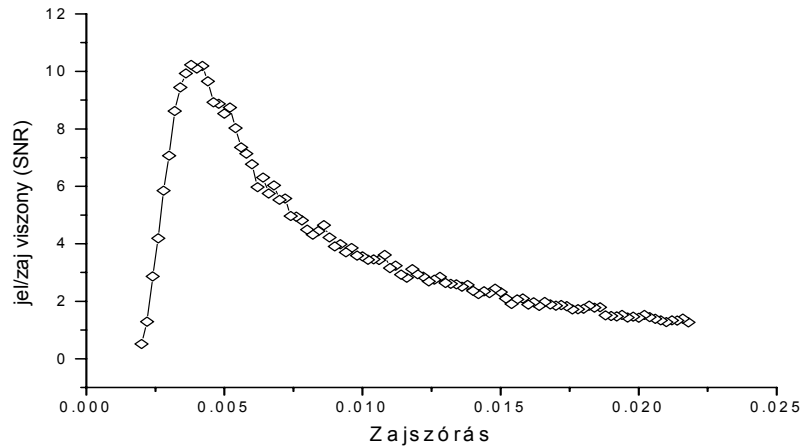
Sztochasztikus rezonancia általános sémája
2. ábra

Legyen ennek a válasznak az amplitúdója független a bemenő jel amplitúdójától. Ha viszont a gerjesztés küszöbszint alatti, akkor a rendszer kimenetén ne jelenjen meg semmilyen válaszjel. Ez az úgynevezett „minden vagy semmi” válasz. Hasonlóan viselkedik például egy idegsejt is.



A küszöbszint metszésének szemléltetése zajos gerjesztéssel
3. ábra

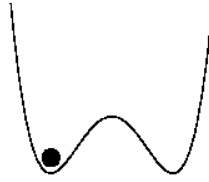
Tehát ha tekintünk egy ilyen rendszert, és ezt gerjesztjük küszöbszint alatti determinisztikus jellel, plusz zajjal (ez lehet külső, vagy a rendszer saját zaja), akkor a kimeneti jel/zaj viszony (SNR) bizonyos zaj amplitúdónál maximum értéket vesz fel (4. ábra).



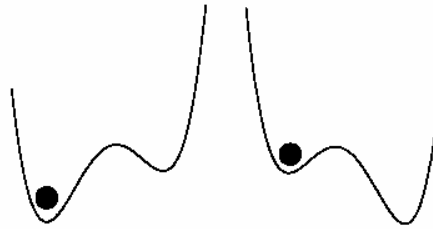
SNR görbe
4. ábra

Ez kissé paradox módon azt jelenti, hogy az optimális jel/zaj viszony eléréséhez megfelelő mennyiségű zajt kell a rendszerbe vinnünk, sőt zaj nélkül nem is tudunk optimális jelátvitelt elérni, illetve kimenő jel sincs. Nyilván a túl kevés zaj csak kevés küszöbszint metszést eredményez, a túl sok zajban pedig elveszik a hasznos jel.

E jelenség szemléltetésére a leggyakoribb példa a szimmetrikus, kettős potenciálgödör [3], mely egyik részében valamilyen véletlen erő hatására egy részecske mozog (5. ábra). Ezzel együtt gerjesszük gyenge külső jellel is ezt a rendszert. A gyenge azt jelenti, hogy a külső gerjesztő jel egymagában (zaj jelenléte nélkül) nem elegendő ahhoz, hogy a részecske átkerüljön egyik gödörből a másikba, legyőzve a köztük lévő potenciálgátat. De néha bekövetkezik ilyen „átbillenés”, méghozzá nem akármekkora fluktuáció hatására. Ez a fluktuáció hozzáadódva a gyenge periodikus gerjesztéshez segít meghaladni a két gödröt elválasztó potenciálfalat.



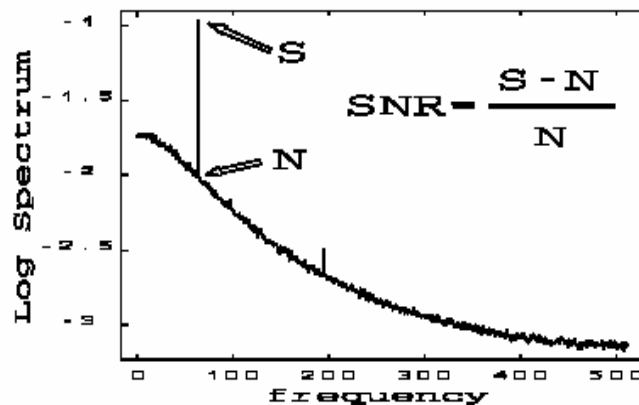
$$U(x,t) = -ax^2 + bx^4 + \epsilon x \sin(\omega t)$$



A kettős potenciálvölgy
5. ábra

Hogyan definiáljuk a jel/zaj viszonyt? Az SNR gyakorlatban használt definíciója (szűksávú SNR): periodikus jelekre a teljesítménysűrűség spektrumban ($S(f)$) az első harmonikus csúcs magasságának (f_0 frekvencián, ami a gerjesztő jel frekvenciája) és a háttérzajnak (S_N) ugyanazon a frekvencián vett aránya [7], amit a következő kifejezés ad meg, és a 6. ábra szemléltet:

$$SNR = \frac{\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} S(f) df}{S_N(f_0)} \quad (1)$$



Az SNR számolásának szemléltetése
6. ábra

Definiálható a szélessávú jel/zaj viszony is, ami a determinisztikus komponens összes harmonikusra számolt P_S teljesítményének és a zaj totális P_N teljesítményének hányadosaként adható meg:

$$\text{SNR}_w = \frac{P_S}{P_N} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{kf_0 - \Delta f}^{kf_0 + \Delta f} S(f) df}{\int_0^{\infty} S_N(f) df} \quad (2)$$

Azt mondhatjuk, hogy minél nagyobb ez a mennyiség, annál jobb a jelátvitel, annál nagyobb a háttérzajhoz viszonyított determinisztikus komponens.

2.2. A zajok jellemzése és matematikai leírása

A mérés technika egyik fontos célja a mindig fellépő zaj minimalizálása. A zaj tulajdonképpen a fizikai rendszerekben fellépő véletlenszerű jel, ami lehet a rendszer saját zaja, illetve kívülről érkező zaj is. A zajok természeti folyamatok eredményei, melyek gyakran befolyásolják az általunk vizsgált mennyiséget. Ezek az állandóan jelenlevő fluktuációk jelentősen torzíthatják mérési eredményeinket, másrészt a rendszerből származó zajok a rendszer állapotától függenek, ezért információt is hordoznak. Léteznek determinisztikus és véletlen zajok. Determinisztikusnak azokat a zajokat nevezzük, amely viselkedése tetszőleges időpontban megjósolható, ha ismerjük a t_0 időpontbeli állapotát, ilyen például a hálózati 50 Hz-es zavarjel. Véletlen zajról beszélünk, ha a jel jövőbeli értékét nem tudjuk kiszámítani, mert a kezdeti feltételek ismeretlenek, és túl sok, vagy/és bonyolult egyenlettel lehet csak jellemezni őket.

A zajok matematikai leírására a valószínűségszámítást alkalmazzuk. Ezért tekintjük át a valószínűségszámítással kapcsolatos fogalmakat.

Valószínűség (p):

Azt jelenti, hogy egy esemény (melyet az i index jelöl) hányszor következik be (N_i) az összes mérésből (N):

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (3)$$

$$\sum_i p_i = 1 \quad (4)$$

Valószínűségi sűrűség:

Azt adja meg, hogy mekkora valószínűséggel találjuk a mért mennyiség értékét $x \pm \Delta x / 2$ tartományban:

$$p(x) \Delta x \approx \frac{N_i}{N} \quad (5)$$

Ez az összefüggés diszkrét értékekre vonatkozik. Ha képezzük $N \rightarrow \infty$ és $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenetet, akkor x megtalálási valószínűsége $[x_1, x_2]$ intervallumban:

$$p(x \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (6)$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (7)$$

Várható érték:

Egy időben fluktuáló x mennyiség átlagát, a következőképpen definiáljuk:

$$\langle x \rangle = \sum_i x_i \cdot p_i = \sum_i x_i \cdot \frac{N_i}{N} \quad (8)$$

ezt x várható értékének hívjuk. A várható érték tulajdonképpen az az érték, ami körül ingadozik ez az x mennyiség.

Folytonos értékekre:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (9)$$

adódik.

Szórás:

A jel ingadozásának mértékét a szórás adja meg. Egy x mennyiség szórásának definíciója:

$$\sigma(x) = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (10)$$

Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságai

Eddig a valószínűségi sűrűségfüggvényt időfüggetlennek tekintettük, azonban lehet időfüggő is: $p(x,t)$. Ergodikusnak nevezzük azokat a folyamatokat, melyeknél a sokaságátlag és az időátlag megegyezik, tehát mindegy, hogy sok hasonló mennyiséget mérünk-e egy pillanatban, vagy egy mennyiséget hosszú időn keresztül:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (11)$$

Korrelációs függvények:

Autokorreláció:

Egy véletlen jelet leíró függvény hasonlíthat időben eltoló változatára. A hasonlóság mértékét a függvény és időben eltoló változata szorzatának várható értékével szokás megadni:

$$R_{xx}(\tau) = \langle x(\tau) \cdot x(t + \tau) \rangle \quad (12)$$

ezt $x(\tau)$ autokorrelációs függvényének nevezzük.

Ergodikus folyamatra:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(\tau) \cdot x(t + \tau) dt \quad (13)$$

Legfontosabb tulajdonságok:

- $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$: az origóra szimmetrikus,
- $R_{xx}(0) = \int x^2 dt$: a 0 pontban felvett értéke a jel energiájával arányos,
- $R_{xx}(\tau)$: periodikus jelre periodikus.

Keresztkorreláció:

Ha az autokorrelációt két függvényre kiterjesztjük, definiálhatjuk a keresztkorrelációs függvényt is:

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t) \cdot y(t + \tau) \rangle \quad (14)$$

Ergodikus folyamatra:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(\tau) \cdot y(t + \tau) dt \quad (15)$$

Tulajdonságai:

- $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$
- $R_{xy}(\tau) = 0$ független folyamatoknál

Véletlen folyamatok frekvenciatartománybeli leírása

Fourier-transzformáció [8,9]

Eddig a sztochasztikus folyamatok időbeli tulajdonságait tekintettük át. Ha át akarunk térni a frekvenciatartománybeli tárgyalásmódra, akkor az időskálát frekvenciaskálára kell áttranszformálnunk. Ilyen transzformációt ad meg a Fourier-transzformáció. Egy $x(t)$ időfüggő jel Fourier-transzformáltját a következőképpen adhatjuk meg:

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (16)$$

Frekvenciatartományból időtartományba az inverz Fourier-transzformációval térhetünk át:

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (17)$$

Ezek az összefüggések időben folytonos és végtelen jelekre vonatkoznak. Méréseink és számításaink során a legtöbbször diszkrét és időben véges jelekkel foglalkozunk, ezért a (16) és (17) összefüggést diszkrét pontsorozatokra is érvényessé kell tenni. Ezt adja meg a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT):

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = 0 \dots N-1 \quad (18)$$

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = 0 \dots N-1 \quad (19)$$

Ez a két kifejezés központi jelentőségű a digitális jelfeldolgozásban. Azonban ez az eljárás meglehetősen időigényes, mert N^2 számú komplex szorzásra van szükség. Ezt le lehet csökkenteni $N \cdot \log_2 N$ számú szorzási műveletre, ha az N mintahosszat kettő hatványának vesszük. Ekkor ugyanis folyamatosan kettővel osztva az adatkészletet kisebb blokkokra lehet felbontani azt, melyekre külön-külön el lehet végezni a DFT-t. Ezt a gyorsabb eljárást gyors Fourier-transzformációnak (FFT) nevezzük.

Teljesítményspektrum:

Az előzőek segítségével a következő összefüggéssel definiálhatjuk a teljesítménysűrűség spektrumot:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (20)$$

tehát az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja, ahol $\omega=2\pi f$ körfrekvencia, f a frekvencia.

A keresztkorrelációs függvény Fourier-transzformáltja pedig a kereszt teljesítményspektrumot adja:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (21)$$

Mintavételi tétel

Mielőtt továbbmennénk, még meg kell ismernünk a mérés technika egy igen fontos tételét, amelynek figyelmen kívül hagyása meghamisíthatja mérési eredményeinket. Ez a tétel Shannon mintavételi tétele néven vált ismertté.

Egy jel mintavételezéses mérése azt jelenti, hogy egyenletes Δt időközönként mintát veszünk a jelből, azaz mintavételezünk. Ennek a Δt időköznek a reciprokát mintavételi frekvenciának (f_s) nevezzük:

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \quad (22)$$

Ha egy olyan jelet szeretnénk mintavételezni, amiben nagyon sokféle frekvencia komponens jelen van (pl.: zene, négyszögjel), és nem tudjuk, hogy ezek közül mekkora a legnagyobb frekvenciájú, és ritkán mintavételezünk – azaz a mintavételi ráta alacsony – akkor a nagyfrekvenciás komponensek hibásan adódnak hozzá a jelhez, eltorzítják azt, tehát hamis mérési eredményt kapunk. E hiba elkerülésére Shannon fogalmazta meg a következő tételt:

Egy jelet információvesztés nélkül úgy mintavételezhetünk, ha a mintavételi frekvencia (f_s) nagyobb, mint a jelben levő legnagyobb frekvenciájú komponens (f_{\max}) kétszerese:

$$f_s > 2 \cdot f_{\max} \quad (23)$$

Ha nem ismerjük ezt az f_{\max} frekvenciát, akkor aluláteresztő szűrőt alkalmazva a jelet a kívánt mértékben meg kell szűrni. Ha ismerjük a mérendő jel felső határfrekvenciáját, akkor ennek a frekvenciának kétszeresénél nagyobb mintavételi frekvenciát kell használni, hogy a mintavételi tétel ne sérüljön. Például egy zenei anyagot azért mintavételeznek 44100 Hz-el, mert az emberi fül a kb. 20 kHz-nél nagyobb frekvenciájú hangokat nem érzékeli, kiszűri, tehát a fül felső határfrekvenciája kb. 20 kHz.

2.3. Fizikai zajok és osztályozásuk [10,11]:

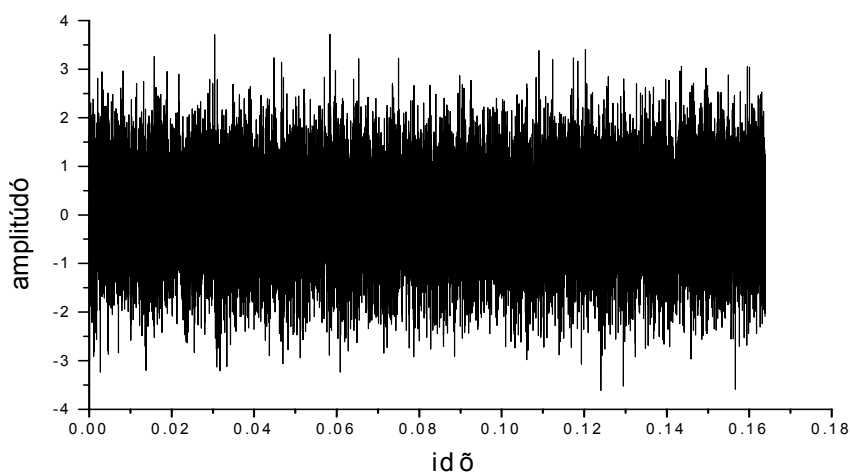
Fizikai rendszerekben számos, különböző tulajdonságokkal rendelkező zaj felléphet. Ezek különbözhetnek valószínűségi sűrűségükben, származásukban (más fizikai modell írja le), eloszlásukban és idő- és frekvenciatartományukban. Most csak a szempontunkból fontos $1/f^\beta$ ($\beta=0\dots 2$) és Lorentzi zajjal foglalkozunk. Azaz a következőkben frekvencia tulajdonságaik alapján osztályozzuk a zajokat.

Fehér zaj:

Az olyan zajokat, melyek teljesítményspektruma adott frekvenciatartományban konstans,

$$S(f) = \text{const.} \quad \text{ha } 0 < f < f_{\max} \quad (24)$$

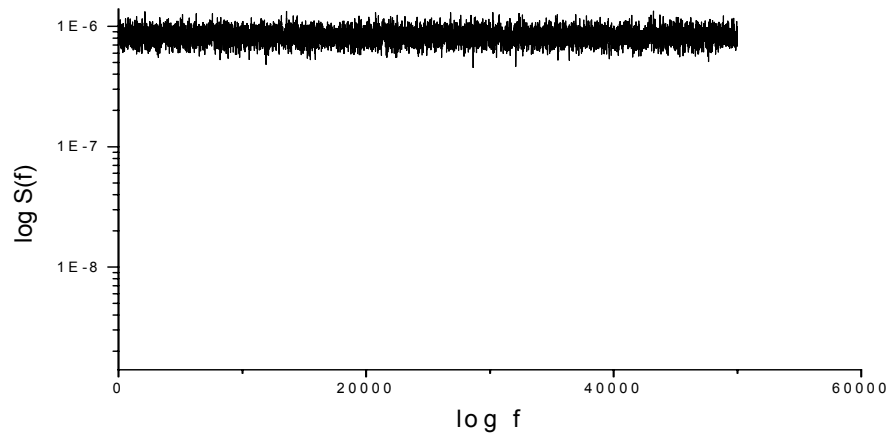
az összes frekvencia komponenst közel azonos arányban tartalmazzák (mint a fehér fény, innen az elnevezés), fehér zajoknak nevezzük (7. ábra).



Fehér zaj időbeli képe
7. ábra

Hozzá kell tennünk, hogy a teljesítményspektrum egy f_{\max} felső határfrekvenciától valamekkora meredekséggel levág, különben a görbe

alatti terület (a teljesítménysűrűség spektrum integrálja) végtelen lenne, ami végtelen energiát jelent, ez pedig nem lehetséges (8. ábra).



Fehér zaj spektruma 50 átlagra nézve
8. ábra

Az ideális fehér zajt korrelálatlannak nevezzük, autokorreláció függvénye Dirac- δ :

$$R_{xx}(\tau) = \delta(\tau) \quad (25)$$

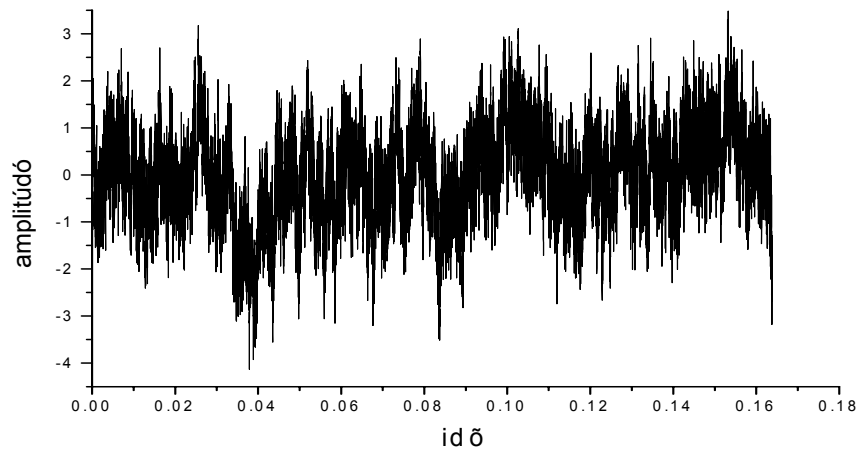
Fehér zajt mérhetünk egy R értékű ohmikus ellenálláson, mely zajspektruma T hőmérsékleten $S(f) = 4kTR$ értékű, ahol k a Boltzmann-állandó.

1/f zaj:

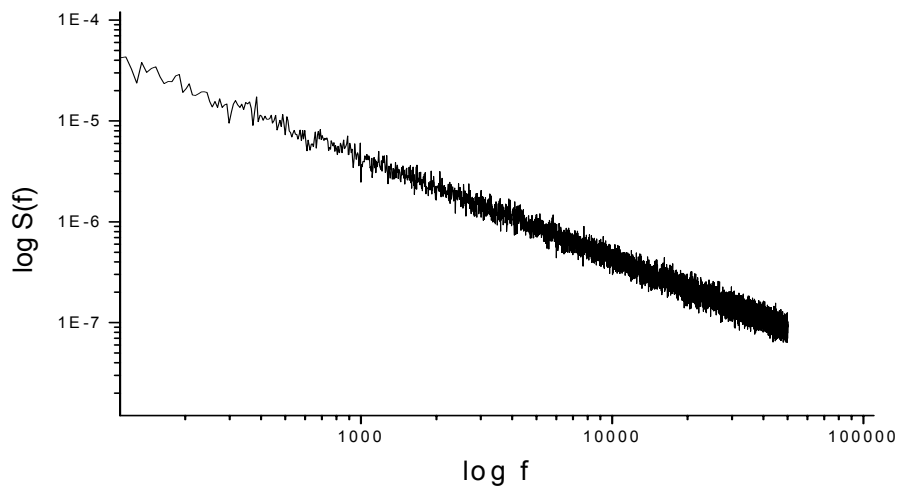
Az olyan zajokat, melyek teljesítményspektruma fordítottan arányos a frekvenciával $1/f$ vagy rózsaszín zajoknak nevezzük (9. ábra). Az $1/f$ zajt vákuumcsőben figyelték meg először, de nagyon sok helyen előfordul (félvezető eszközökben, biológiai rendszerekben, társadalmi folyamatokban, sőt szívritmus fluktuációnál, Nílus vízszintjének ingadozásánál). A mai napig sem sikerült rá általános modellt illeszteni, ezért fontos szerepet tölt be a zajkutatózásban. Spektruma a következő formulával adható meg:

$$S(f) = c \cdot \frac{1}{f^\beta}, \quad \text{ahol } c = \text{const.}; \beta = 0.8 \dots 1.2 \quad (26)$$

Ebből látszik, hogy a spektrumot kétszer logaritmikus skálán ábrázolva -1 meredekségű egyenes kapunk (10. ábra).



1/f zaj időbeli képe
9. ábra



1/f zaj spektruma 50 átlagra nézve
10. ábra

Fontos tudnunk, hogy az $1/f$ zaj mindig rendelkezik alsó és felső határfrekvenciával (az $1/f$ zaj sávkorlátozott), mert integrálja nullában és végtelenben divergens, ezért az energiája végtelen lenne, ez nem lehetséges.

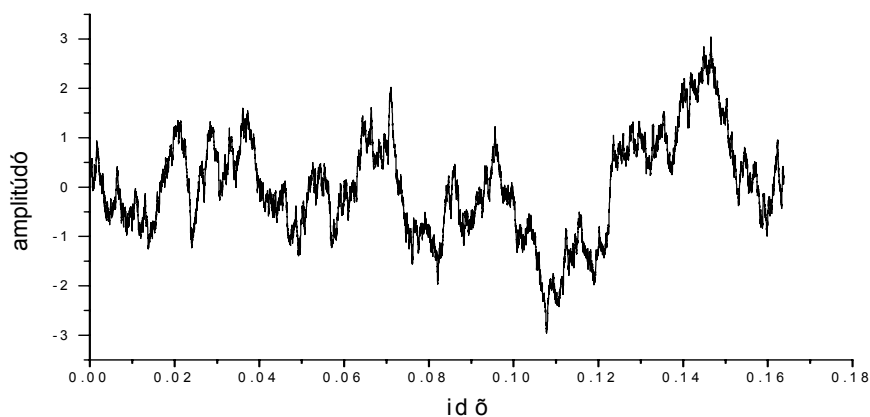
$1/f^2$ zaj

Ha spektrum

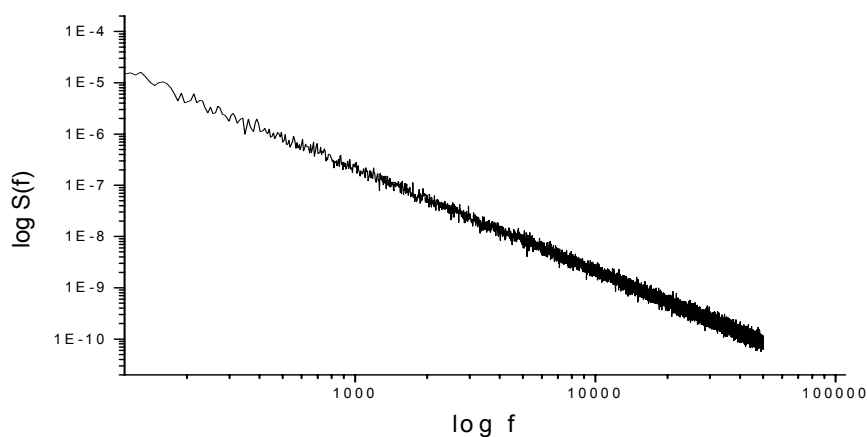
$$S(f) = C \frac{1}{f^2}, \quad \text{ahol } C = \text{const.} \quad (27)$$

alakú, akkor $1/f^2$ zajról beszélünk (11. ábra).

Fizikai példaként említhető egy Brown-mozgást végző részecske, melynek helykoordinátája $1/f^2$ szerűen fluktuál. Kétszer logaritmikus skálán ábrázolva a spektrumot -2 meredekségű egyenest kapunk (12. ábra).



$1/f^2$ zaj időbeli képe
11. ábra



$1/f^2$ zaj spektruma 50 átlagra nézve
12. ábra

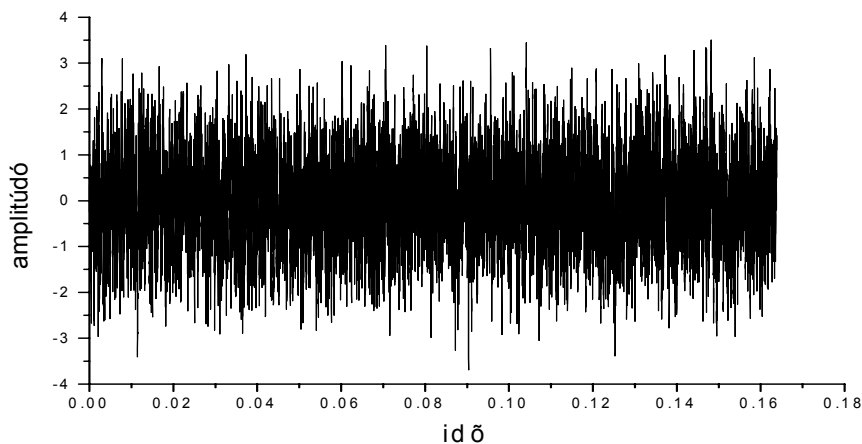
Az $1/f^2$ zaj mindig rendelkezik alsó határfrekvenciával, mert különben teljesítménysűrűség spektrumának integrálja nullában végtelen lenne.

Lorentzi zaj

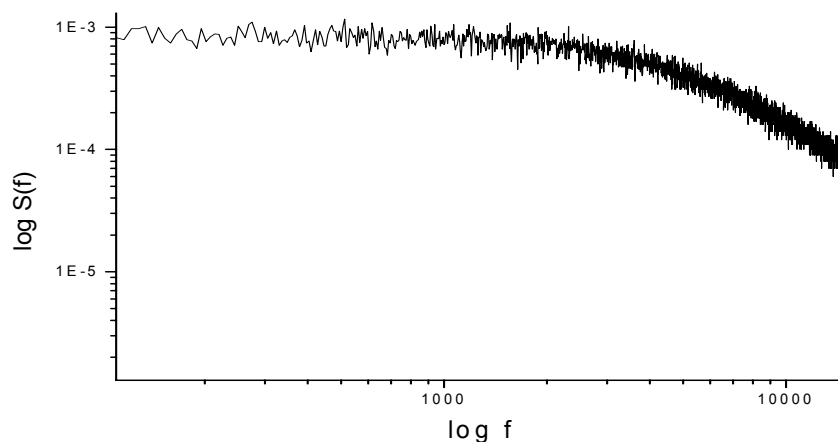
A színes zajok között kell még említeni a természetben igen gyakran előforduló Lorentzi zajt (13. ábra). A Lorentzi zaj teljesítményspektruma egy f_0 frekvenciáig konstans, e felett a frekvencia felett $1/f^2$ szerint csökken (14. ábra):

$$S(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad (28)$$

Az f_0 konstans frekvenciát törésponti frekvenciának is nevezik. Az $1/f^2$ zaj a Lorentzi zaj határesetének is tekinthető az $f_0 \ll f$ határesetben.



Lorentzi zaj időbeli képe ($f_0=5000$ Hz)
13. ábra



Lorentzi zaj spektruma 50 átlagra nézve ($f_0=5000$ Hz)
14. ábra

3. Az idegsejtről általában [12,13]

A membránpotenciál

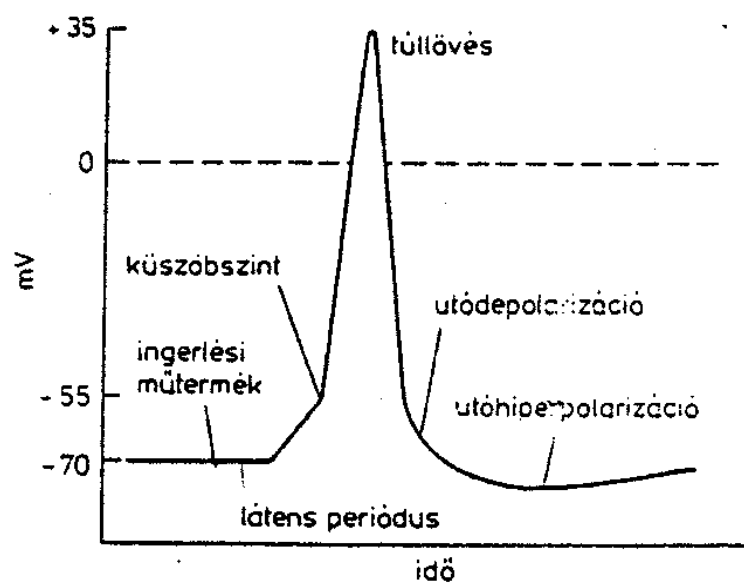
Az ingerelhetőség az élőlények egyik legfontosabb tulajdonsága. A külső ingerekre történő reagálást a sejtek elektromos tulajdonságai határozzák meg, e feladatkör ellátására speciális sejtek fejlődtek ki (pl.: idegsejtek). Minden élő sejtben elektromos potenciálkülönbség lép fel a sejt belseje és a sejten kívüli térrész között. A sejt belseje általában negatív potenciálú a külső fázishoz viszonyítva. A nem gerjesztett állapotú sejtekben mérhető potenciált nyugalmi potenciálnak nevezzük. A sejt külső gerjesztésre rövid elektromos potenciálváltozással válaszol, amely a nyugalmi potenciálból indul ki, és később ugyanoda tér vissza. Ezt tranziens potenciálnak hívjuk. Legfontosabb tranziens potenciálok az ideg- és izomkötegek akciós potenciáljai. Az elektromos potenciálkülönbséget az ionok (K^+ , Na^+ , Cl^- ionok) egyenlőtlen eloszlása okozza a plazmamembránt körülvevő oldatokban, ezért ezt a potenciált membránpotenciálnak nevezzük.

A nyugalmi potenciál

Ha egy izolált idegsejt felszíne és belseje között mérjük a potenciálkülönbséget, azt figyelhetjük meg, hogy a sejt belseje negatív potenciálú a külsejéhez képest. Ezt az állandó potenciálkülönbséget nyugalmi (membrán)potenciálnak hívjuk, mely értéke az idegsejtben átlagosan -70 mV.

Az akciós potenciál

A sejtben akciós potenciál keletkezik, ha a sejt aktív állapotba kerül. A nyomást érzékelő sejtek rövid, pozitív feszültségimpulzussal reagálnak, ha a nyomás meghalad egy jól meghatározott küszöb(potenciál) értéket. Az izomrost összerándul, a membránpotenciál rövid időre pozitív irányba a küszöbérték fölé ugrik. Idegsejtben az akciós potenciál kb. 1 ms alatt visszatér a nyugalmi szintre, sőt túl is fut rajta. Ezzel a membrán hiperpolarizálttá válik, ezt hiperpolarizáló utópotenciálnak nevezik. Innen visszakerül nyugalmi állapotába (15. ábra). Azt mondhatjuk, hogy a neuron egy kétállapotú monostabil rendszer. Ismételt gerjesztéssel ugyanabban a sejtben akciós potenciálok sorozatát lehet kelteni, ezek kinetikája mindig ugyanolyan. Az akciós potenciálok sorozatát a sejt tüzelésének nevezik.



15. ábra

Ingerküszöb

Akción potenciált csak olyan inger vált ki, melynek hatására a membrán egy bizonyos küszöbértéket meghaladó mértékben depolarizálódik. Ez a küszöbérték kb. 20 mV-tal a nyugalmi potenciál felett van.

Minden vagy semmi válasz

Ha a gerjesztés nem éri el a küszöbszintet, akkor a sejtben nem vált ki akciós potenciált. Ha azonban meghaladja azt, akkor a válasz nagysága független gerjesztés intenzitásától. Erősebb gerjesztés sem vált ki nagyobb amplitúdójú akciós potenciált. Ha a sejt egyáltalán válaszol, akkor az maximális. Tehát a sejt vagy teljesen, vagy egyáltalán nem válaszol az őt ért ingerekre.

Holtidő (refrakter periódus)

Az idegsejtet nem lehet újra gerjeszteni addig, amíg a feszültség a csúcspotenciál kb. egyharmadáig le nem csökken. Tehát azt az időtartamot, amíg a neuron újragerjeszthetővé válik holtidőnek nevezzük.

3.1. A FitzHugh-Nagumo-féle neuron modell (FHN):

Az SR egyik fontos alkalmazási területe az idegsejt viselkedésének modellezése. Ilyen az FHN modell, melyet a következő elsőrendű, nemlineáris, csatolt differenciálegyenlet rendszer ír le, periodikus gerjesztés és zaj jelenlétében [2]:

$$\varepsilon \dot{v} = v(v - a)(1 - v) - w + A_T - B + S(t) + \xi(t) \quad (29)$$

$$\dot{w} = v - w - b \quad (30)$$

ahol $v(t)$ az ún. „gyors” változó, amely az idegsejt membránpotenciálját reprezentálja, $w(t)$ a „lassú” (feléledési) változó, $\varepsilon=0.005$, $a=0.5$, $b=0.15$. ε az időállandó, mely a tüzelési folyamat sebességét determinálja. Az A_T az ún. „kritikus érték”, ez a mennyiség reprezentálja a küszöbszintet ebben a rendszerben, ha $A_T \approx 0.11$, akkor a tüzeléssorozat periodikussá válik. $S(t)$ egy, az ingerküszöb (lásd.: később) alatti periodikus jel. B az átlagos jelszint és A_T közötti különbség. $\xi(t)$ pedig

Gauss-eloszlású $1/f^\beta$ zajt reprezentál ($0 \leq \beta \leq 2$). Ha $\beta=0$, akkor a $\xi(t)$ Gauss-eloszlású fehér zajra redukálódik.

Az FHN modell egy olyan matematikai modell, mely nemcsak kvalitatív, de elég jó kvantitatív modellül is szolgál, ugyanis elég jól visszaadja az akciós potenciál jelalakját.

4. Az FHN modell szimulációs vizsgálata

A következőkben ismertetem az FHN modell vizsgálatára kidolgozott numerikus és analóg számítógépes szimulációs módszereinket és eredményeinket.

4.1. Differenciálegyenletek numerikus megoldása

Tekintsük a

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \quad (31)$$

elsőfokú egyenletrendszer, ahol $x(t)$ egy n -dimenziós vektorértékű függvény. Az ilyen feladatok analitikus megoldása már egyszerű $f(x(t), t)$ esetén is nehéz vagy lehetetlen, nem beszélve arról, hogy az egyenletünk tartalmaz sztochasztikus komponenst is. Ha f nem függ t értékétől, akkor rendszerünk autonóm. A numerikus megoldás az $x(t)$ függvény néhány értékének meghatározását célozza. Tipikus feladat a kezdetiérték probléma, amikor (31)-n kívül egy x_0 kezdőérték is ismert, és egy adott t_i -hez tartozó $x(t_i)$ értékre vagyunk kíváncsiak.

Az Euler-módszer (egylépéses algoritmus) az általában nemlineáris függvény helyett annak lineáris közelítését használja lépésenként.

Legyenek $x_0=0$ és $t_0=0$ kezdeti feltételeink, és $t_{i+1}=t_i+\Delta t$ iterációs lépés. Δt egy pozitív szám, melyet olyan kicsire kell választani, hogy ezen belül a megoldásfüggvény lineáris legyen.

Átírva (31)-et:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = f(x(t), t) \quad (32)$$

$$\Delta x = \Delta t \cdot f(x(t), t) \quad (33)$$

$$\Delta x = x(t_{i+1}) - x(t_i) \quad (34)$$

$$\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t \cdot f(x(t_i), t_i) \quad (35)$$

alakú közelítő megoldás adódik.

Esetünkben (29)-re és (30)-ra alkalmazva az eljárást kapjuk:

$$V = v_{i+1} = v_i + \Delta t \cdot f(v_i, w_i, t_i) \quad (36)$$

$$W = w_{i+1} = w_i + \Delta t \cdot g(v_i, w_i, t_i) \quad (37)$$

$$T = t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (38)$$

$v(0)=v_0=0$; $w(0)=w_0=0$; $t_0=0$ kezdeti feltételekkel.

$$V = v + \frac{\Delta t}{\varepsilon} [v(v - a)(1 - v) - w + A_T - B + S(t) + \xi(t)] \quad (39)$$

$$W = w + \Delta t \cdot (v - w - b) \quad (40)$$

$$T = i\Delta t \quad (41)$$

4.2. Az FHN modell numerikus szimulációja

A numerikus szimulációt a – tanszéken már több éve eredményesen alkalmazott – LabView nevű fejlesztőkörnyezetben [14] – G programozási nyelven – valósítottam meg. Ez egy olyan magas szintű, főleg grafikus programozású fejlesztő környezet, melyben előre megírt szubrutinok segítségével nagyon egyszerűen és gyorsan lehet például: grafikont ábrázolni, spektrumot mérni, átlagolni, különböző jeleket generálni. Példaként a Függelékben található egy Gauss-eloszlású $1/f^\beta$ zajt

generáló LabView program, mely megjeleníti az időbeli jelalakot, és annak spektrumát is.

Mielőtt alkalmaznánk az Euler-módszert, elő kell állítanunk a gerjesztő jelet (esetünkben szinuszt), majd a megfelelő spektrumú, határfrekvenciájú és szórású zajt. Ezután következhet a differenciálegyenlet megoldása. A differenciálegyenlet megoldása után a kimeneti jelalak teljesítményspektrumát véve számolhatunk jel/zaj viszonyt. Egy adott zajszórásnál 1000 jel/zaj viszonyt mértünk, és ezek átlagát vettük. Ezután ugyanezt az eljárást alkalmazzuk különböző szórású, határfrekvenciájú és spektrumú zajokra. Az így kapott SNR görbék elemzéséből következtethetünk a rendszer tulajdonságaira.

Nézzük először a szinusz előállítását, illetve annak paramétereit. A szinuszjelet a következőképpen generáltuk le:

$$S(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot t/T) \quad (42)$$

$$t = i \cdot dt \quad \text{az, ahol } i = 0 \dots N, \text{ és } N^2 \text{ hatványa} \quad (43)$$

$$T = M \cdot dt \quad \text{, ahol } M^2 \text{ hatványa} \quad (44)$$

így garantált, hogy a mintában egész számú szinusz periódus van. N a teljes minta hossza, azaz az adatok száma, melyet $N=2^{14}=16384$ pontnak, M a szinusz minta hossza, melyet $M=2^{11}=2048$ pontnak, dt lépésközt pedig $dt=10^{-5}$ s-nak választottuk, ami $f_s=10^5$ Hz mintavételi frekvenciát jelent. A szinusz A amplitúdóját $A=0.01$ -nak vettük, ez a küszöbnek egy tizede. Ezek a paraméterek $f_{sin}=48.83$ Hz-es frekvenciát adják. Az A_T paramétert $A_T=0.07$ értékre állítottuk, mely a küszöb 70%-a.

Az előállítandó zaj három kritériumnak kell, hogy eleget tegyen: spektrumbeli, határfrekvenciabeli, szórásbeli kritérium.

A LabView-ban rendelkezésünkre álló előre megírt rutinok között találunk egy olyat, mely Gauss-eloszlású fehér zajt generál. Nekünk viszont $1/f^6$ spektrumú,

illetve Lorentzi zajra van szükségünk. Ezért Fourier-transzformáljuk a fehér zajt, és a spektrumot (amplitúdó spektrum), amit kapunk beszorozzuk $-(\beta/2)$ kitevőjű hatványfüggvénnyel, Lorentzi zaj esetén $\sqrt{1/(1+(f/f_0)^2)}$ -el, majd inverz Fourier-transzformáljuk. Így megkapjuk a kívánt spektrumú zajt.

Következő kritérium a határfrekvencia alkalmas beállítása. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a Fourier-transzformáció után a spektrumból a kívánt frekvencia feletti komponensek amplitúdóját nullának vesszük, és ezután inverz transzformálunk.

Végül következik a szórás beállítása. Ezt elvégezhetjük úgy, hogy kiszámítjuk a már beállított spektrumú és határfrekvenciájú zaj szórását, ezzel leosztva normáljuk a zajt, majd az általunk választott szórás értékkel beszorozzuk.

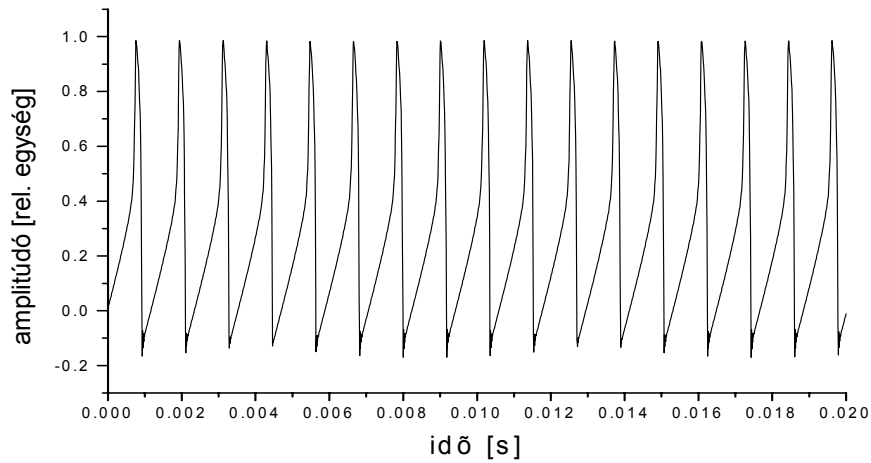
Ezzel az egyszerű eljárással előállítható tetszőleges spektrumú, határfrekvenciájú és szórású zaj. A zaj felső határfrekvenciáját $f_{\max}=50$, 10 és 5 kHz-re állítottuk be. Lorentzi zaj esetén törésponti frekvenciát változtattuk.

4.3. A numerikus szimuláció eredményei:

Nézzük meg először, hogy az FHN modellnek milyen a megoldás függvénye, abban az esetben, ha a küszöbérték $A_T=0.11$, a gerjesztés (szinusz) amplitúdója $S(t)=0$ egység, a zaj amplitúdója $\xi(t)=0$ egység, a tranzienseket pedig elhagytuk (16. ábra).

$$\varepsilon \dot{v} = v(v - a)(1 - v) - w + A_T \quad (45)$$

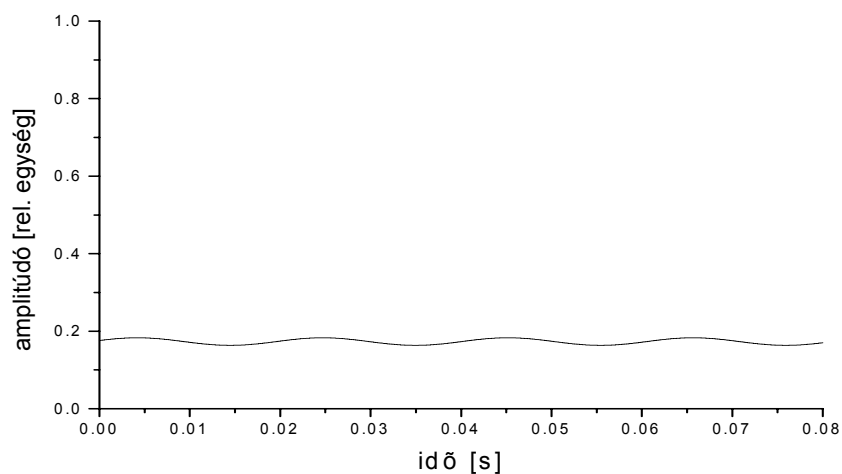
$$\dot{w} = v - w - b \quad (46)$$



Kimenőjel: $A_T=0.11$, $S(t)=0$, $\xi(t)=0$ paraméterekkel
16. ábra

A 16. ábrán jól látható, hogy a jel oszcillál, azaz az akciós potenciál periodikus, ezt a jelenséget az idegsejt „tüzelésének” nevezzük, ez tekinthető egyfajta öngerjesztett állapotnak is.

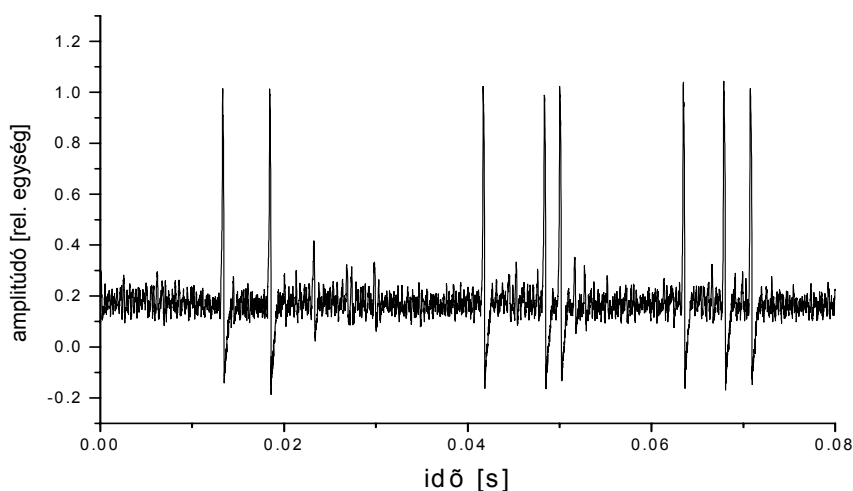
Vizsgáljuk meg, mi történik akkor, ha A_T értékét lecsökkentjük $A_T=0.07$ -re, $S(t)=0.01$ egység, vagyis küszöb alatti, $\xi(t)=0$ egység (17. ábra).



Kimenő jel: $A_T=0.07$, $S(t)=0.01$, $\xi(t)=0$ paraméterekkel
17. ábra

Látható, hogy a küszöbalatti gerjesztés nem vált ki akciós potenciált zaj jelenléte nélkül.

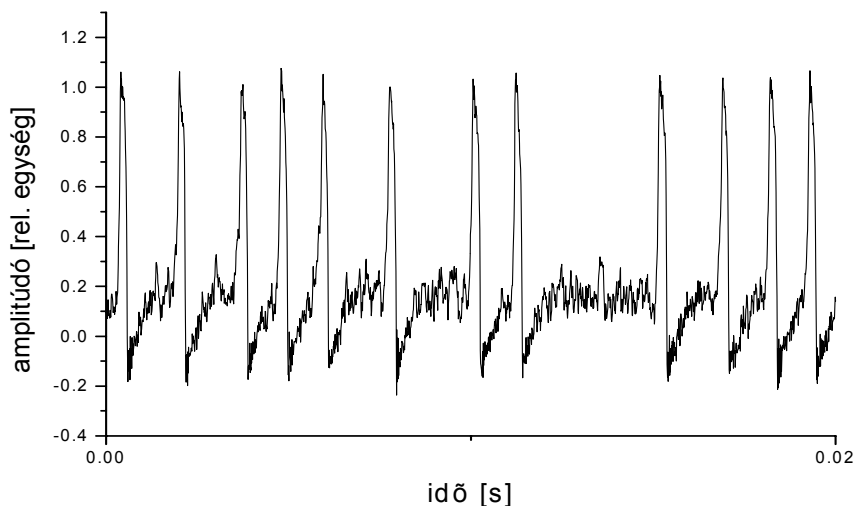
Következő lépésként növeljük meg a zaj (Gauss-eloszlású fehér zaj) amplitúdóját annyira, hogy a szinusszal együtt néha meghaladhassák a küszöbszintet (18. ábra).



Kimenő jel: $A_1=0.07$, $S(t)=0.01$, $\xi(t)=0.0075$ paraméterekkel
18. ábra

Az ábrán látható, hogy impulzusok (akciós potenciálok) jelennek meg, de még csak véletlenszerűen. Ez azt jelenti, hogy a jelenlévő zaj néha segít meghaladni a küszöböt, néha nem. A fontos az, hogy zaj nélkül nem történt küszöbszint metszés (17. ábra), zaj segítségével viszont néha bekövetkezett ilyen esemény. Tehát ebben az esetben a zajnak konstruktív szerepe van, mert segíti a küszöb alatti gerjesztések hatását.

Növeljük tovább a zaj szórását, mi történik ekkor? A 19. ábrán láthatjuk, hogy közel azonos időközönként keletkezik akciós potenciál, majdnem periodikusan. A 19. ábrát összevetve a 16. ábrával elég nagy hasonlóságot fedezhetünk fel.



Kimenő jel: $A_T=0.07$, $S(t)=0.01$, $\xi(t)=0.015$ paraméterekkel
19. ábra

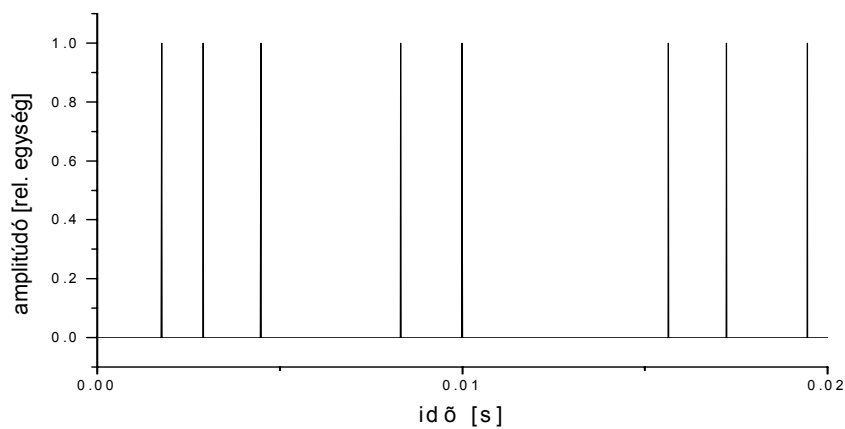
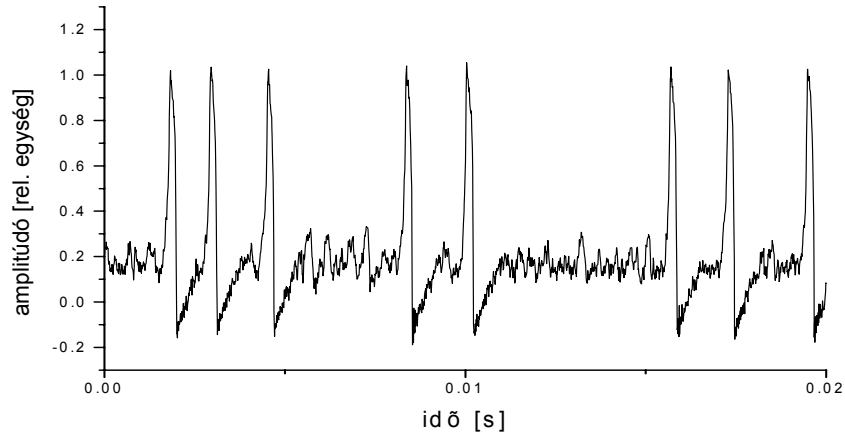
A bemutatott ábrák jól mutatják, hogy:

1. Akciós potenciál csak zaj jelenlétében keletkezett, ezért azt mondhatjuk, hogy a zaj segített, „jótékony” hatású,

2. Nagyon lényeges, hogy mekkora amplitúdójú zajt viszünk a rendszerbe.

A kimenő jelalak vizsgálatával viszont nehezen tudunk megállapításokat tenni a zaj határfrekvenciájának és spektrális tulajdonságainak a rendszerre gyakorolt hatásaival kapcsolatban.

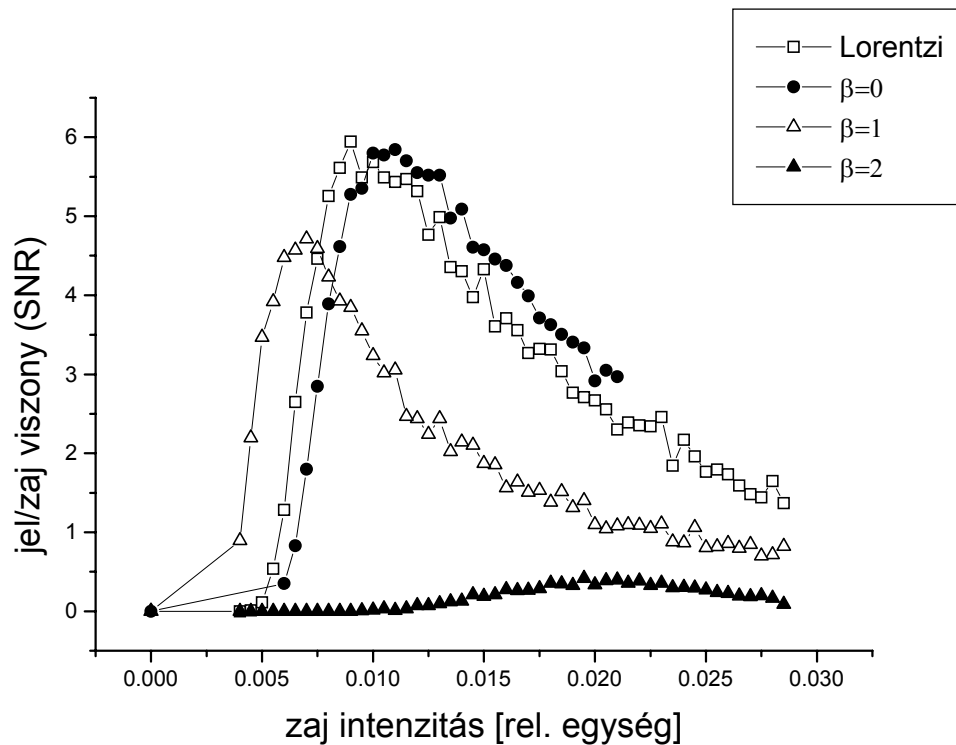
Ennek a két tulajdonságnak a hatását jel/zaj viszony számolásával, és az SNR görbék vizsgálatával tudjuk elemezni. Hogy jel/zaj viszonyt tudjunk számolni, először átalakítjuk az akciós potenciált egységnyi amplitúdójú impulzusokká. Ezt azért tesszük, mert csak a kiváltott akciós potenciálok között eltelt idő fluktuációját vizsgáljuk. Megállapodás szerint [2] akkor keletkezik egy impulzus, ha a jel pozitív meredekséggel meghaladja a 0.5 értéket (20. ábra).



A kimenő jel impulzussá alakítása
20. ábra

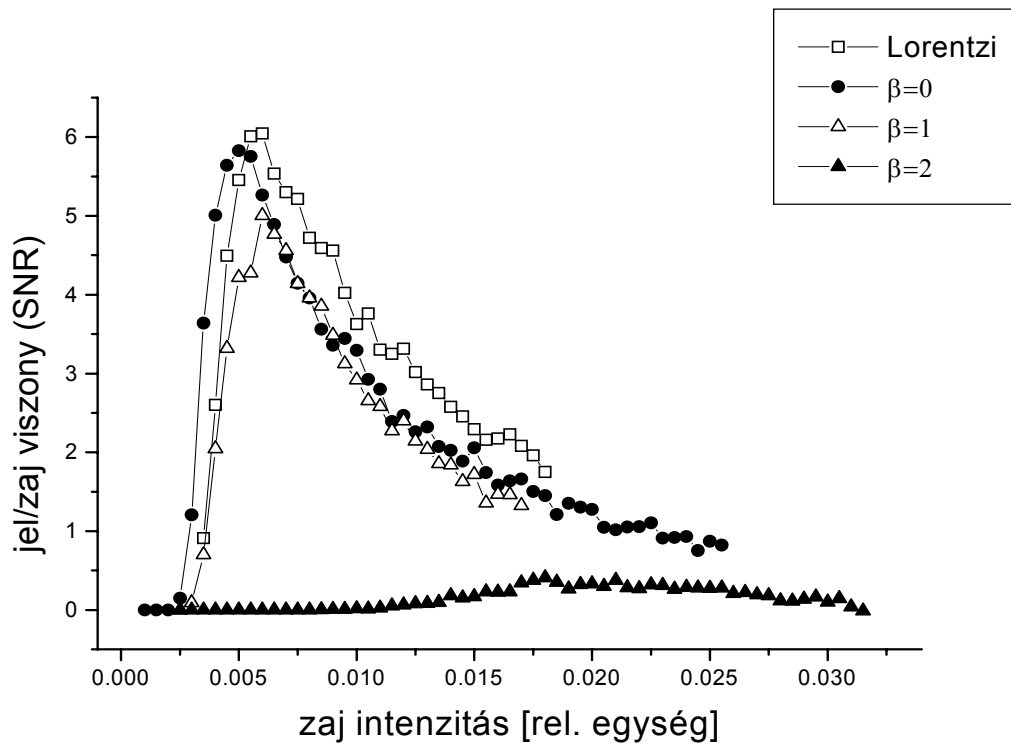
A zaj határfrekvenciájának beállítása után az impulzusok spektrumát számolva a kezdő kis zajértéktől indulva megmérjük a jel/zaj viszonyt, majd növelve a zajintenzitást több pontban felvesszük az SNR görbét. Ezután ezt az eljárást elvégezzük különböző spektrumú és határfrekvenciájú zajokra is.

A 21. ábrán láthatóak a kapott SNR görbék. A zaj felső határfrekvenciája ekkor $f_{\max}=50$ kHz. Jól látszik, hogy ennél a határfrekvencia értéknél $1/f$ zaj esetén kisebb zajintenzitás elegendő a maximum eléréséhez. Az is látható azonban, hogy az SNR maximum értéke $1/f$ zajnál kisebb, mint Lorentzi vagy fehér zajnál. Az $1/f^2$ zaj hatása elhanyagolható. Ebben az esetben valóban igaz, hogy az $1/f$ zaj a „legoptimálisabb” az FHN modellnél SR maximalizálására.

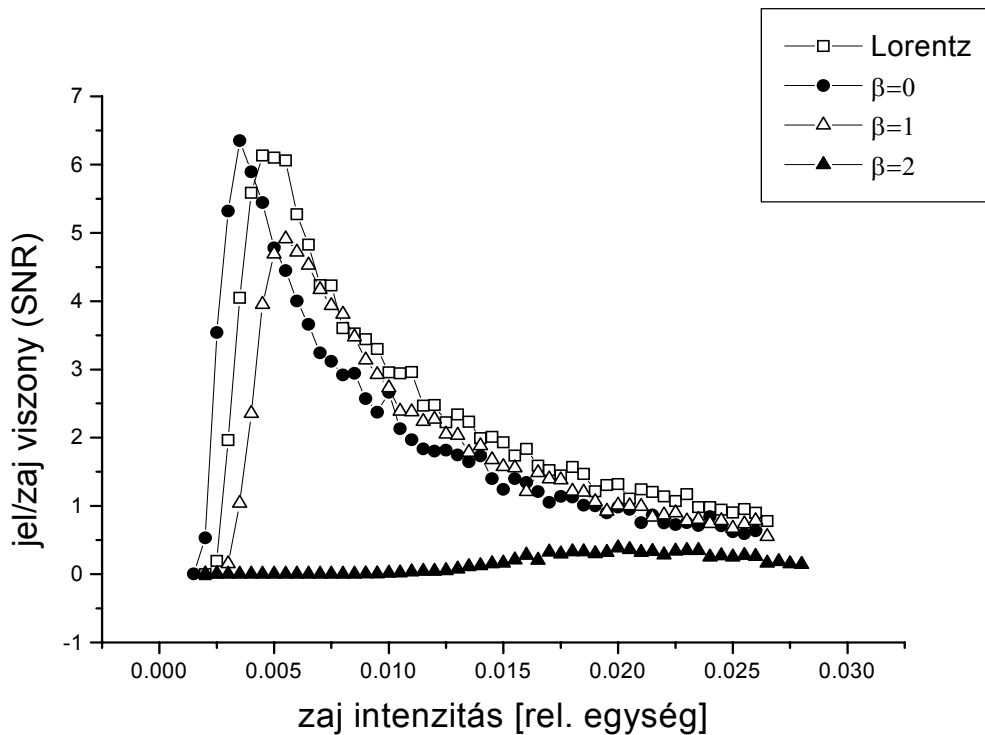


Kapott SNR görbék Lorentzi (üres négyzet), $1/f$ (üres háromszög), fehér (fekete kör) és $1/f^2$ (fekete háromszög) zaj esetén, a zaj felső határfrekvenciája: $f_{\max}=50$ kHz
21. ábra

De nézzük meg a következő, 22. ábrát, ahol a zajok határfrekvenciáját ötödére ($f_{\max}=10$ kHz) vettük az előzőhöz képest. Lorentzi zajnál csak a törésponti frekvenciát változtattuk, a felső határfrekvencia maradt 50 kHz. Jól láthatóan a fehér és Lorentzi zajoknál az SNR maximum balra, a kisebb zaj intenzitások felé tolódott. Ezzel szemben az $1/f$ zaj maximuma szinte semmit, vagy legalábbis alig mozdult balra. Ekkor már nem lehet egyértelműen kijelenteni, hogy az $1/f$ zaj optimálisabb az FHN modellben, mint a fehér, vagy akár a Lorentzi zaj. Megnéztük még egy esetre az SNR görbék viselkedését, a zaj határfrekvenciáját 5kHz-re állítottuk (23. ábra). Ekkor a maximumok fehér és Lorentzi zajnál még inkább balra tolódtak, míg $1/f$ zajnál ez annyira nem jelentős.



Kapott SNR görbék Lorentzi (üres négyzet), $1/f$ (üres háromszög), fehér (fekete kör) és $1/f^2$ (fekete háromszög) zaj esetén, a zaj felső határfrekvenciája: $f_{\max}=10$ kHz; Lorentzi zajnál $f_{\max}=50$ kHz, $f_0=10$ kHz
22. ábra

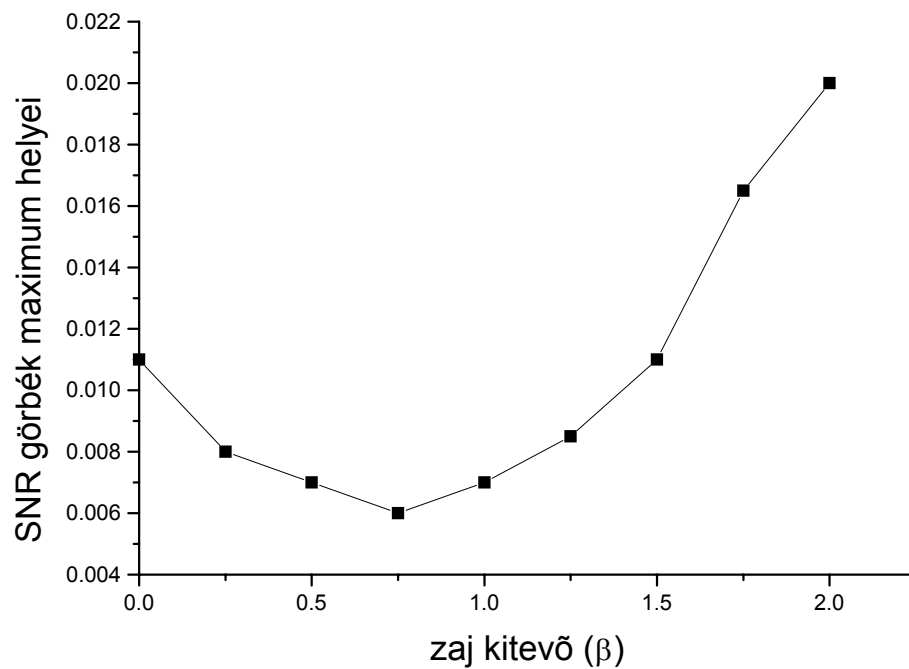


Kapott SNR görbék Lorentzi (üres négyzet), $1/f$ (üres háromszög), fehér (fekete kör) és $1/f^2$ (fekete háromszög) zaj esetén, a zaj felső határfrekvenciája: $f_{\max}=5$ kHz; Lorentzinél $f_{\max}=50$ kHz, $f_0=5$ kHz
23. ábra

Ezekből az eredményekből arra következtethetünk, hogy ez a dinamikai modell valamiféle sávszűrő karakterisztikával rendelkezik. Azt mondtuk a 2.2. szakaszban, hogy fehér zajban a nagyfrekvenciás komponensek ugyanúgy jelen vannak, mint a kisfrekvenciás komponensek. Azt már korábban említettük, hogy $1/f$ zajban inkább az alacsony frekvenciás komponensek a dominánsak. A sávszűrő tulajdonság miatt a nagyfrekvenciás komponensek kiesnek. Ez megmagyarázza azt, hogy a fehér zajból többet kell bevinnünk a rendszerbe, mint $1/f$ zajból, ha a határfrekvencia nagy.

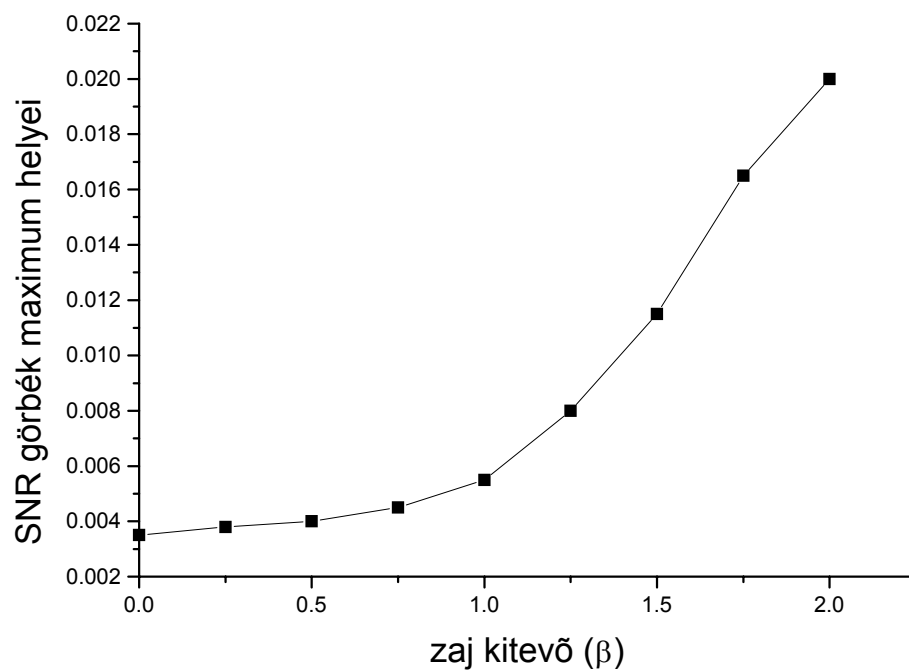
Az a kijelentés, hogy az $1/f$ zajnak az FHN modellnél kitüntetett szerepe van csak olyan speciális körülmények között érvényes, amelyek előfordulása a természetben igen csekély. A fehér zajban jelenlevő nagyfrekvenciás komponensek a numerikus szimulációnál gondot okozhatnak. A cikk szerzői [2] a zaj generálásánál erre nem figyeltek eléggé, és ezek a nagyfrekvenciás komponensek csak 3-4 pontból álltak elő, ami természetesen hibát okoz. Ez kiküszöbölhető a zaj megfelelő szűrésével, ezért kellett a határfrekvenciát alacsonyabbra venni.

Az említett publikáció [2] csak $1/f^\beta$, $\beta=0,1,2$ értékeire vizsgálták a sztochasztikus rezonanciát, és azt állította, hogy a kapott SNR görbék maximumaihoz tartozó zaj intenzitás $\beta=1$ esetén a minimális. Mi azonban megnéztük $\beta=0; 0.25; 0.5...2$ értékekre is, és azt kaptuk, hogy ez nem teljesen így van (24. ábra).



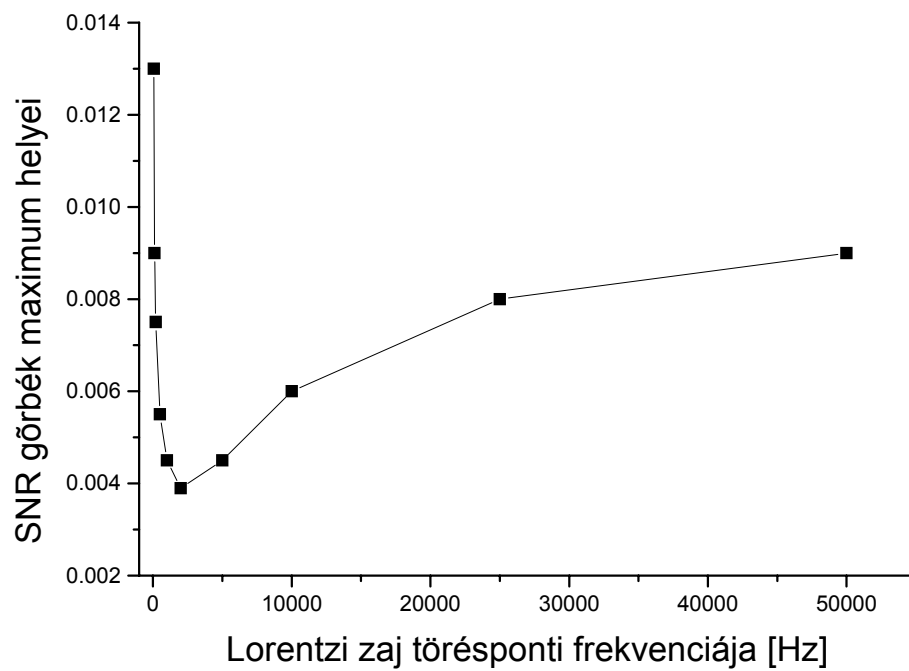
Maximum helyek a zaj kitevőjének függvényében $f_{\max}=50$ kHz zaj határfrekvencia esetén
24. ábra

Mi azt kaptuk, hogy a minimum közelítőleg a $\beta \approx 0.75$ érték környékén van, ha a zaj határfrekvenciája $f_{\max}=50$ kHz. Ugyanezt ábrázolva $f_{\max}=5$ kHz zaj határfrekvencia esetén a 25. ábrán látható görbét kaptuk. Észrevehető, hogy a görbe minimuma a fehér zajhoz került közelebb, a $\beta \approx 0-0.5$ kitevő környékére.



Maximum helyek a zaj kitevőjének függvényében $f_{\max}=5$ kHz zaj határfrekvencia esetén
25. ábra

Ugyanilyen vizsgálat elvégezhető a Lorentzi zajnál kapott SNR görbénél is (26. ábra).



SNR görbék maximum helyei a zaj törésponti frekvenciájának függvényében
26. ábra

Megfigyelhetjük, hogy Lorentzi zaj esetén is megfigyelhető az SNR görbék maximum helyeinek függése a zaj törésponti frekvenciájától. Azt kaptuk, hogy 2000 Hz törésponti frekvenciájú Lorentzi zajból kell a legkevesebbet bevinni a rendszerbe az SNR maximalizálásához.

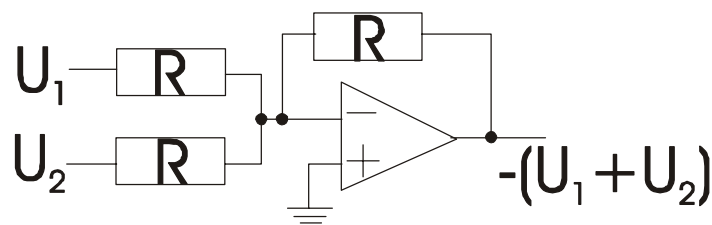
Csupán a zaj határfrekvenciájának csökkentésével megmutattuk, hogy nincs kitüntetett szerepe az $1/f$ zajnak az FHN modellben, sőt $1/f$ zajnál nemcsak a fehér, de a Lorentzi zaj is jobbnak bizonyult.

5. Differenciálegyenletek megoldása analóg számítógéppel

Az analóg áramkörök körében léteznek olyanok, melyek képesek matematikai műveletek elvégzésére. A matematikai változókat feszültség reprezentálja, a műveletek elvégzését pedig adott elektronikai kapcsolás biztosítja. Mivel sokféle kapcsolás kialakítható, így sokféle egyenlet reprezentálható. Az ilyen, egyenletet realizáló áramköröket analóg számítógépeknek nevezzük. Ezeket passzív (ellenállás, kondenzátor...) és aktív áramköri elemek (pl.: műveleti erősítő, tranzisztor) építik fel.

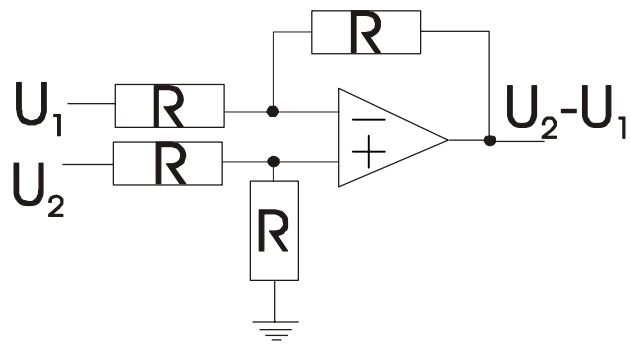
Egyik leghatékonyabb eszköz a műveleti erősítő, mely felhasználásával könnyen megvalósítható

– két feszültség összegzése (27. ábra):



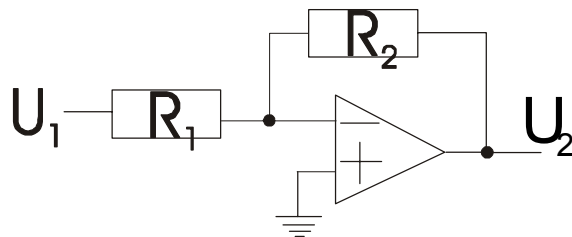
27. ábra

– kivonása (28. ábra):



28. ábra

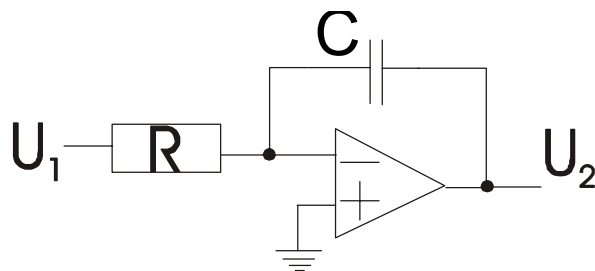
– feszültség szorzása számmal (29. ábra):



29. ábra

$U_2 = -\frac{R_2}{R_1}U_1$, ha $R_1=R_2$, akkor $U_2=-U_1$, tehát a kapcsolás invertáló.

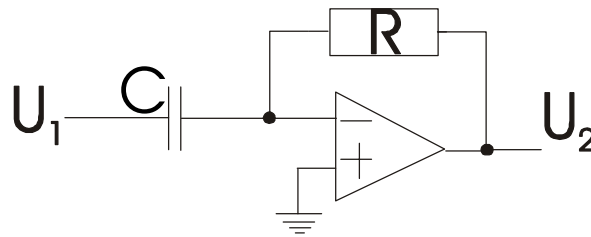
– feszültség integrálása (30. ábra):



30. ábra

$$U_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_1(t) dt + U_2(0) \quad (46)$$

– feszültség differenciálása (31.ábra):



31.ábra

$$U_2 = -RC \frac{dU_1(t)}{dt} \quad (47)$$

Két feszültség szorzatát IC formájában gyártott analóg szorzó áramkörökkel valósíthatjuk meg.

Az ilyen kapcsolásokból felépülő áramköröket legtöbbször fizikai jelenségek modellezésére, illetve differenciálegyenletek megoldására alkalmazzuk. Nyilván, mint azt eddig láttuk ezeket a differenciálegyenleteket meg lehet oldani digitális számítógéppel numerikusan is, de az analóg számítógépek is képesek a megoldást gyorsan szolgáltatni, valódi fizikai rendszerek és e mellett analóg jelet szolgáltatnak. Azt mondtuk, hogy a matematikai változókat feszültség reprezentálja, azaz az $y(x)$ mennyiségnek a modellezés során az $U(t)$ feszültség felel meg. A t idő az x független változóval, az U feszültség pedig az y mennyiséggel arányos:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{\tau} t \\ y = \frac{1}{U_0} U \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = \frac{U(t)}{U_0} \quad (48)$$

Ezt a formulát azért használjuk, hogy a differenciálegyenletet olyanra alakítsuk, melyet realizálni tudunk. Ezt azért tesszük, mert az aktív áramköri elemek miatt adott feszültség- és időtartományon belül kell maradni. Az átalakítás tehát azt jelenti, hogy az x és y mennyiségekről áttérünk a t és U mennyiségekre, az U_0 és τ

konstansokat pedig úgy kell megválasztani, hogy ezen a feszültség- és időtartományon belül maradjunk. Nézzünk egy példát. Legyen a differenciálegyenletünk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (49)$$

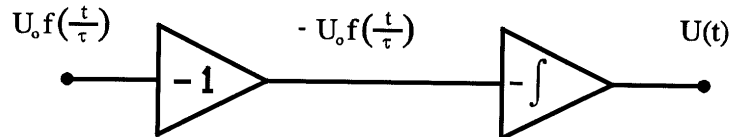
alakú. Ennek megoldását integrálással kapjuk:

$$y(x) = y(0) + \int_0^x f(x) dx \quad (50)$$

Most vezessük be a $t=\tau x$ és $U=U_0 \cdot y$ változót, ekkor (50)-et így írhatjuk:

$$U(t) = U(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t U_0 \cdot f\left(\frac{t'}{\tau}\right) dt' \quad (51)$$

A τ paraméter értékét az integráló kör RC időállandójának vesszük, ekkor a megoldást következő blokkséma mutatja (32. ábra):



32. ábra

Tehát az $U_0 \cdot f\left(\frac{t}{\tau}\right)$ feszültséget előállítva a kapcsolás kimenetén megjelenik a megoldásfüggvény.

Az analóg számítógépes megoldás főbb lépései

1. Az x, y változókról áttérünk a t időre és U feszültségre (48) szerint. Az U_0 -t úgy választjuk meg, hogy U értéke az áramkör minden pontján U_{\min} és U_{\max} közé essen. U_{\min} és U_{\max} értékeit a műveleti erősítők tápfeszültsége szabja meg. A τ paramétert az integráló kör időállandójának választjuk.

2. Az egyenletet integrálegyenletté alakítjuk.

3. Realizáljuk az egyenletnek megfelelő elektronikai kapcsolást, törekedve arra, hogy minél kevesebb áramköri elemből épüljön fel.

4. Az esetleges túlcseresznyeket mérésrel ellenőrizzük.

5.1. Az FHN egyenletrendszer analóg számítógépes szimulációja

Tekintsük a FitzHugh-Nagumo-féle neuron működést leíró differenciálegyenlet rendszert (29), (30), a differenciálást kiírva:

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = v(v-a)(1-v) - w + A_T - B + S(t) + \xi(t) \quad (52)$$

$$\frac{dw}{dt} = v - w - b \quad (53)$$

vezessük be a $t = \alpha \cdot \tau$ mennyiséget, ekkor

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{dv}{d\tau} = v(v-a)(1-v) - w + A_T - B + S(\alpha\tau) + \xi(\alpha\tau) \quad (54)$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dw}{d\tau} = v - w - b \quad (55)$$

Integrálva mindkét egyenletet, majd a konstansokkal felszorozva kapjuk:

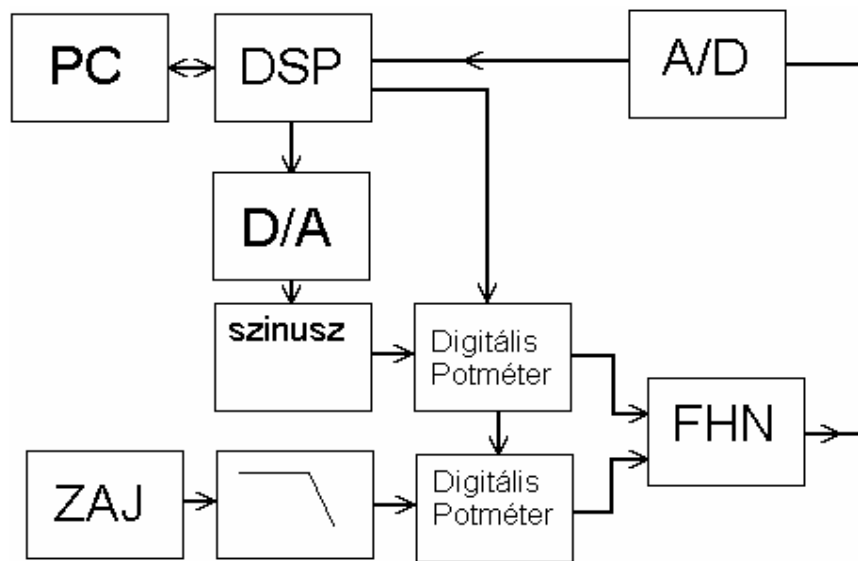
$$v = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \int_0^T [v(v-a)(1-v) - w + A_T - B + S(\alpha\tau) + \xi(\alpha\tau)] d\tau + v(0) \quad (56)$$

$$w = \alpha \int_0^T (v - w - b) d\tau + w(0) \quad (57)$$

$v(0)$ és $w(0)$ kezdeti feltételek.

Az analóg számítógépes modellezés és mérés menete

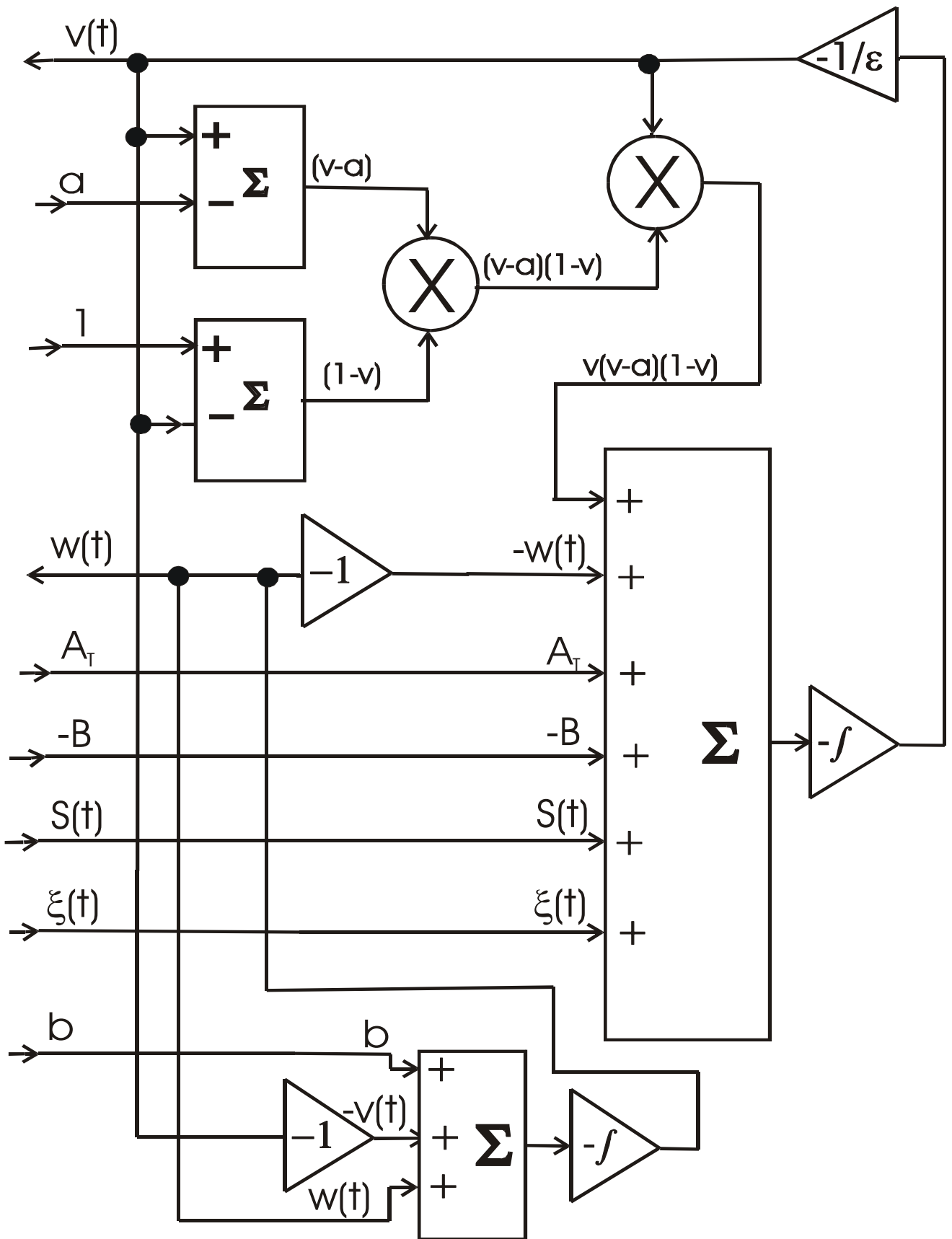
Első dolgunk létrehozni a differenciálegyenletet megoldó áramkört. Ezt az egyenletrendszer megvalósító áramkör bloक्सémája a 34. ábrán, a konkrét áramköri kapcsolás a függelékben (F.2.), a mérési elrendezés vázlata pedig a 33. ábrán látható.



A mérési elrendezés vázlata
33. ábra

Az FHN modellt megoldó áramkört a PC-hez egy digitális jelprocesszoron (DSP) keresztül illesztjük. A PC a soros kommunikációs porton keresztül adja az utasításokat a DSP-nek. A DSP végzi a mintavételezést, és a mért adatokat továbbítja a PC-nek, ahol az adatok feldolgozása folyik. Fehér zaj generátorként egy tranzisztort használtunk, mely zaját egy négyfokozatú erősítővel erősítettük fel.

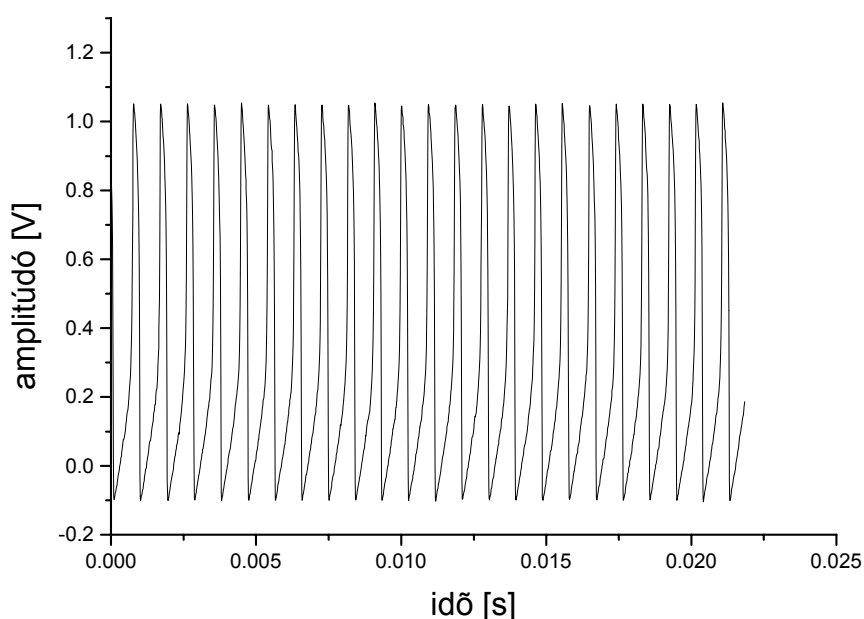
Ebből könnyen tudunk Lorentzi zajt előállítani, ha bevezetjük egy digitálisan programozható analóg aluláteresztő szűrőbe, melynek vágási frekvenciája 50 kHz körüli. $1/f$ zajt pedig egy, a laborban készült MOS-FET $1/f$ zajgenerátor szolgáltatja. A kívánt zajt keresztül vezetjük egy digitális – a DSP által kezelt – potenciométeren, mely ezek után kerülhet az FHN bemenetére. A szinusz jelet (szoftveresen letölthető) a DSP-vel állítottuk elő és egy 12-bites D/A konverter segítségével analóg jellé alakítottuk, ezt egy másik digitális potenciométeren keresztül vezetve kerül az FHN bemenetére. A szinusz jel frekvenciája 360 Hz körüli. Az FHN által szolgáltatott kimenő jelet egy 16-bites A/D konverteren keresztül a DSP mintavételezi 100 kHz mintavételi frekvenciával. Az egész rendszert a PC felügyeli, pontosabban a PC-n futó szoftver, amelyet szintén LabView-ban írtunk meg.



Az FHN egyenletrendszer megoldó áramkör blokksémája
34. ábra

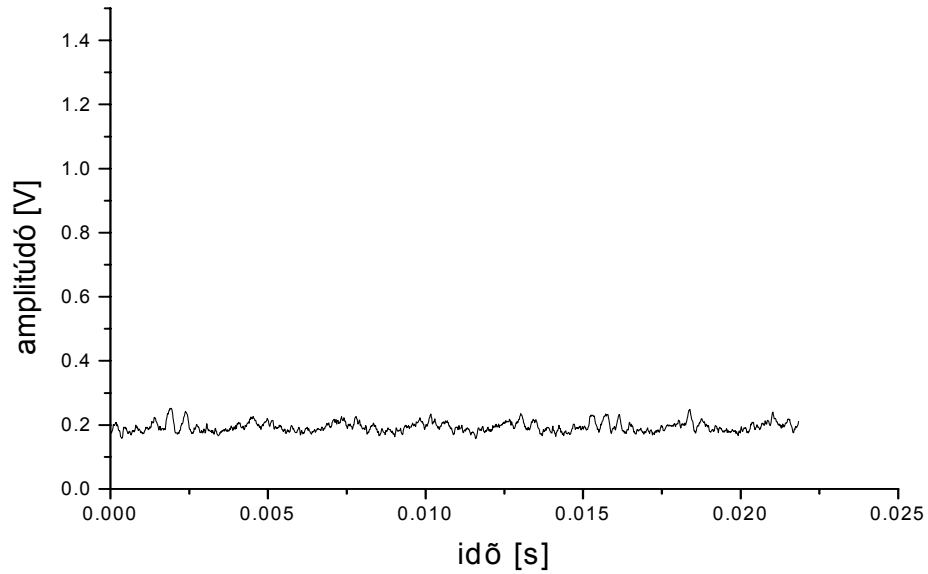
5.2. Az analóg szimuláció eredményei

Analóg szimuláció esetén fehér, $1/f$ és különböző törésponti frekvenciájú Lorentzi zajokra vizsgáltuk az SNR görbéket. A eredmények szemléltetésének módszere azonos a numerikus szimulációéval. Legelőször megvizsgáljuk, hogy milyen kimenő jelet ad az FHN áramkör külső gerjesztés nélkül $A_T=1.1$ V esetén (az áramkörben alkalmazott tízes szorzó miatt) (35. ábra).



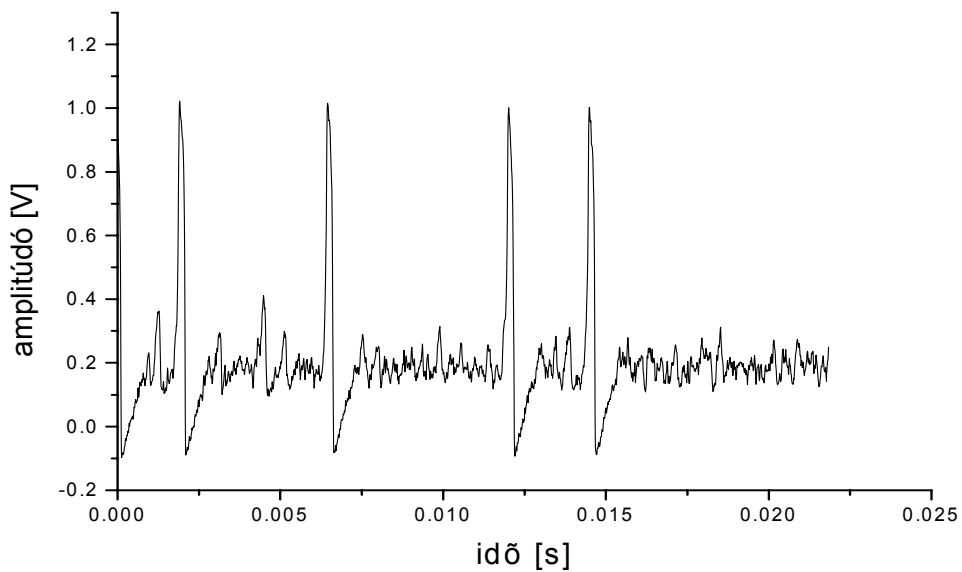
FHN áramkör kimenő jele $A_T=1.1$ V értéknél külső gerjesztés nélkül
35. ábra

Ezt összevetve a numerikus szimuláció által szolgáltatott eredménnyel, nagyon jó egyezést tapasztalhatunk. Ez megerősít bennünket abban, hogy az áramkör jól működik. Ha az öngerjesztést megszüntetjük ($A_T=0.5$ V), és csak küszöbalatti ($S=0.1$ V-os amplitúdójú) determinisztikus jellel gerjesztjük a rendszert, akkor a 36. ábrán lévő trajektóriát kapjuk. A jelenség a numerikus szimulációnál kapottal azonos. Akciós potenciál nem keletkezett küszöbszint alatti gerjesztés hatására.



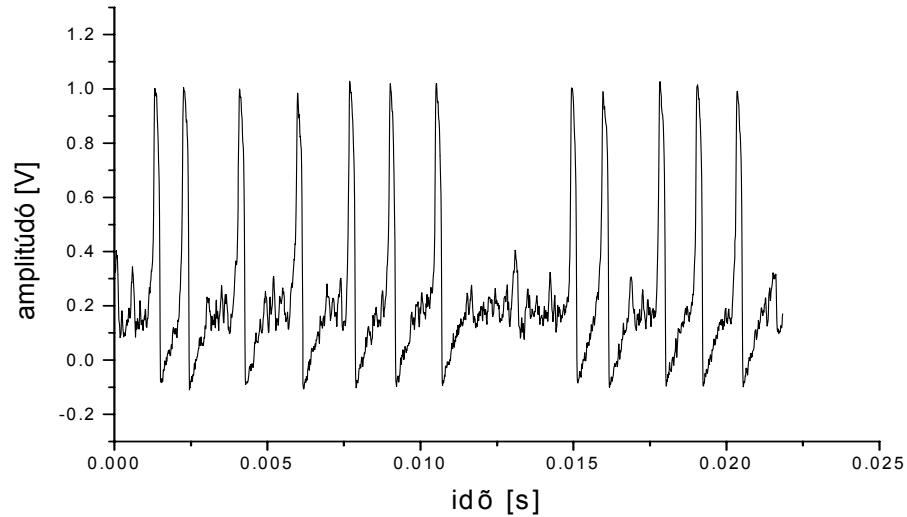
FHN áramkör kimenő jele küszöb alatti gerjesztés esetén, $A_1=0.5$ V, $S=0.1$ V
36. ábra

Adjunk most már hozzá valamennyi zajt is (37. ábra).



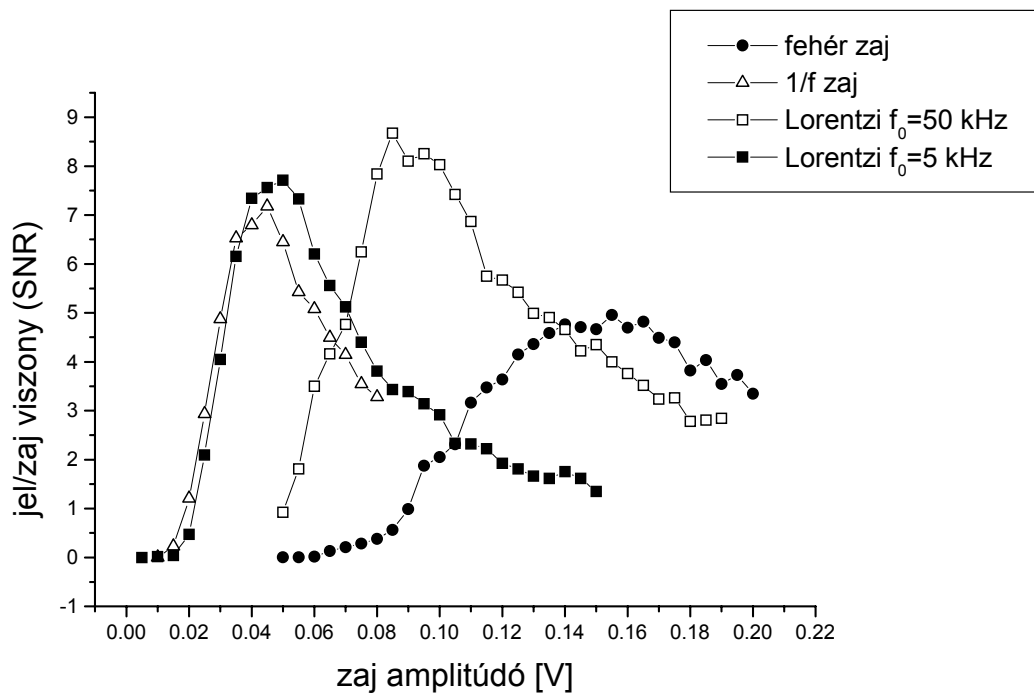
FHN áramkör kimenő jele küszöb alatti szinuszos és kis zajú gerjesztéssel, $A_1=0.5$ V, $S=0.1$ V, $\xi=0.025$ V
37. ábra

Ott, ahol a zaj és a szinusz amplitúdójának összege meghaladta a küszöböt véletlenszerűen jött létre akciós potenciál. Adjunk még több zajt a gerjesztéshez (38. ábra).



FHN áramkör kimenő jele szinusszal és zajjal gerjesztve $A_T=0.5$ V, $S=0.1$ V, $\xi=0.06$ V
 38. ábra Azt lehet mondani, hogy bizonyos mennyiségű zajt hozzáadva a küszöbalatti determinisztikus jelhez segít öngerjesztést létrehozni.

Most nézzük a kapott SNR görbéket (39. ábra).



SNR görbék analóg mérésnél fehér (fekete kör); 1/f (üres háromszög) zaj; Lorentzi zaj $f_0=50$ kHz (üres négyzet) $f_0=5$ kHz (fekete négyzet) törésponti frekvencia esetén

39. ábra

Az analóg mérési eredmények elsősorban a Lorentzi zaj szempontjából érdekesek. Mivel a természetben többféle törésponti frekvenciájú Lorentzi zaj előfordul, ezért több törésponti frekvencia értékre célszerű tanulmányozni ezt a jelenséget. Az eredmények itt is azt mutatják, hogy ha törésponti a frekvenciát lecsökkentjük, akkor az SNR görbe maximuma a kisebb zaj amplitúdók felé került. Tudjuk, hogy Lorentzi zajban az $1/f$ zajhoz hasonlóan az alacsonyfrekvenciás komponensek a dominánsak, vagyis a maximum eltolódásának magyarázatát a rendszer sávszűrő jellege adja.

Összefoglalva találtunk olyan zajt, amely az $1/f$ zajjal lényegében azonos hatású az FHN modellben. Megállapítható tehát, hogy az $1/f$ zaj kitüntetett szerepe nem általános érvényű.

6. Összefoglalás

Dolgozatomban célul tűztem ki a FitzHugh-Nagumo-féle neuron modellben fellépő sztochasztikus rezonancia vizsgálatát. A fentebbi vizsgálatokkal választ szerettem volna kapni arra a kérdésre, hogy mennyire általános érvényű D. Nozaki és szerzőtársai által tett kijelentés [2], miszerint az $1/f$ zajnak az FHN modellben kitüntetett szerepe van a többi zajjal szemben.

Dolgozatomban a következő eredményekre jutottam:

- Numerikus és analóg számítógépes szimulációt fejlesztettem ki a FitzHugh-Nagumo-féle neuron modellre. E módszerek lehetővé teszik a neuron működésének és a neuronrendszerekben előforduló sztochasztikus rezonancia jelenségének vizsgálatát;

- Kiterjesztettem a vizsgálatokat több zajkitevőre ($\beta=0; 0.25; 0.5; 0.75; \dots; 2$), és megvizsgáltam a természetben szintén gyakran előforduló Lorentzi zajokra is a sztochasztikus rezonanciát;

- A numerikus szimuláció, és a mérési eredmények azt mutatták, hogy $1/f$ zajnak csak olyan sáv szélesség esetén van kitüntetett szerepe, mely a természetben igen csekély valószínűséggel fordul elő;

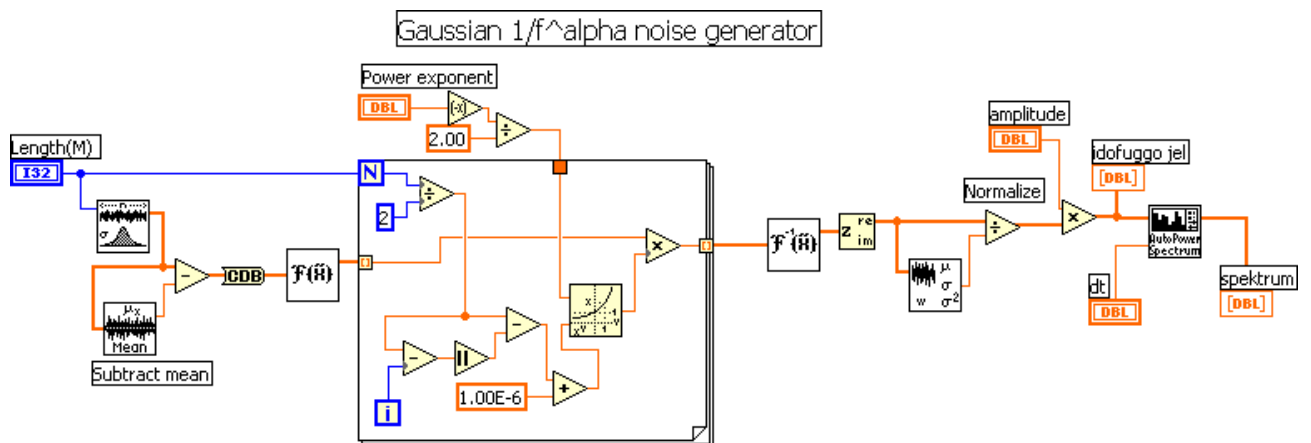
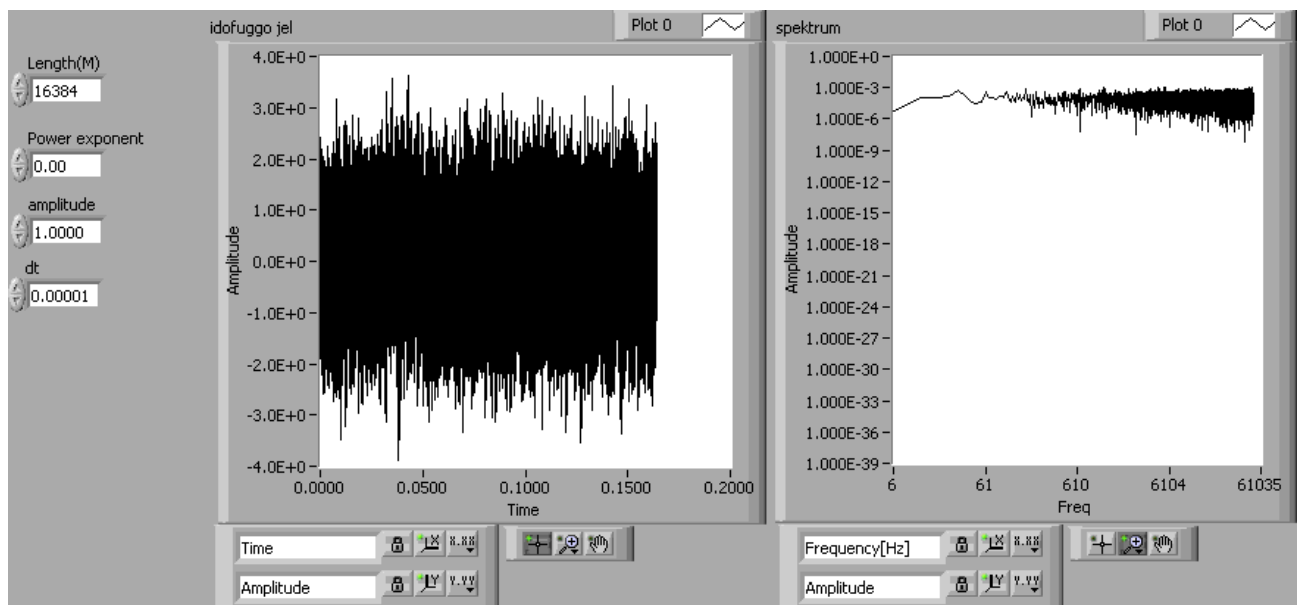
- Vizsgálataink során azt találtunk, hogy a Lorentzi zaj az $1/f$ zajhoz nagyon hasonló hatású. Ez azt jelenti, hogy az $1/f$ zaj kiemelt szerepe nem általános érvényű.

További vizsgálatok folytathatók a gerjesztés frekvenciájának, amplitúdójának és a küszöbérték változtatásának jel/zaj viszony görbékre gyakorolt hatásával kapcsolatban.

7. Köszönetnyilvánítás:

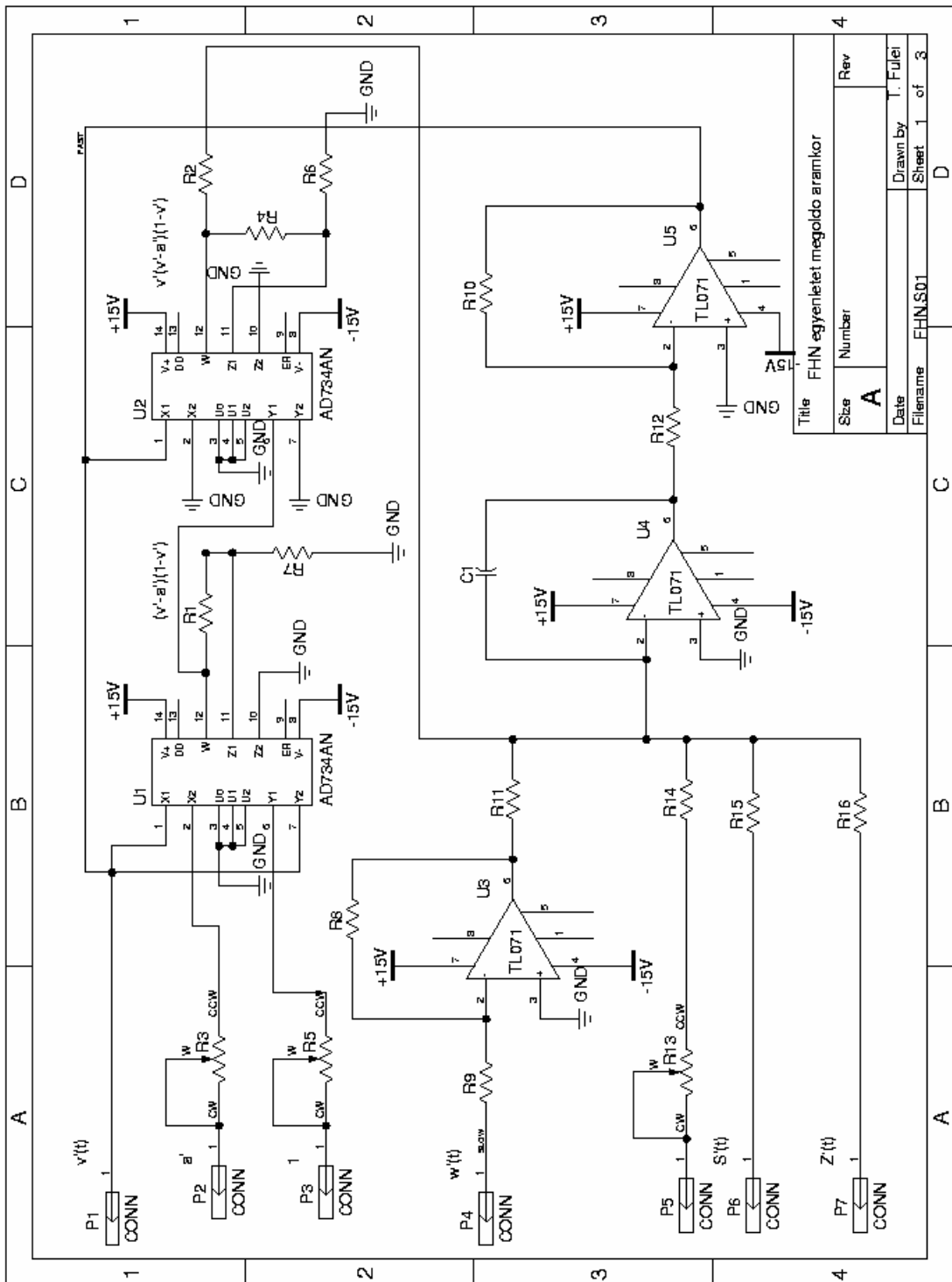
Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Gingl Zoltánnak a problémafelvetést, munkámban nyújtott segítségét, türelmét, és a Kísérleti Fizikai Tanszéknek, hogy lehetőséget, és helyet biztosított számomra e dolgozat elkészítéséhez.

8. Függelék

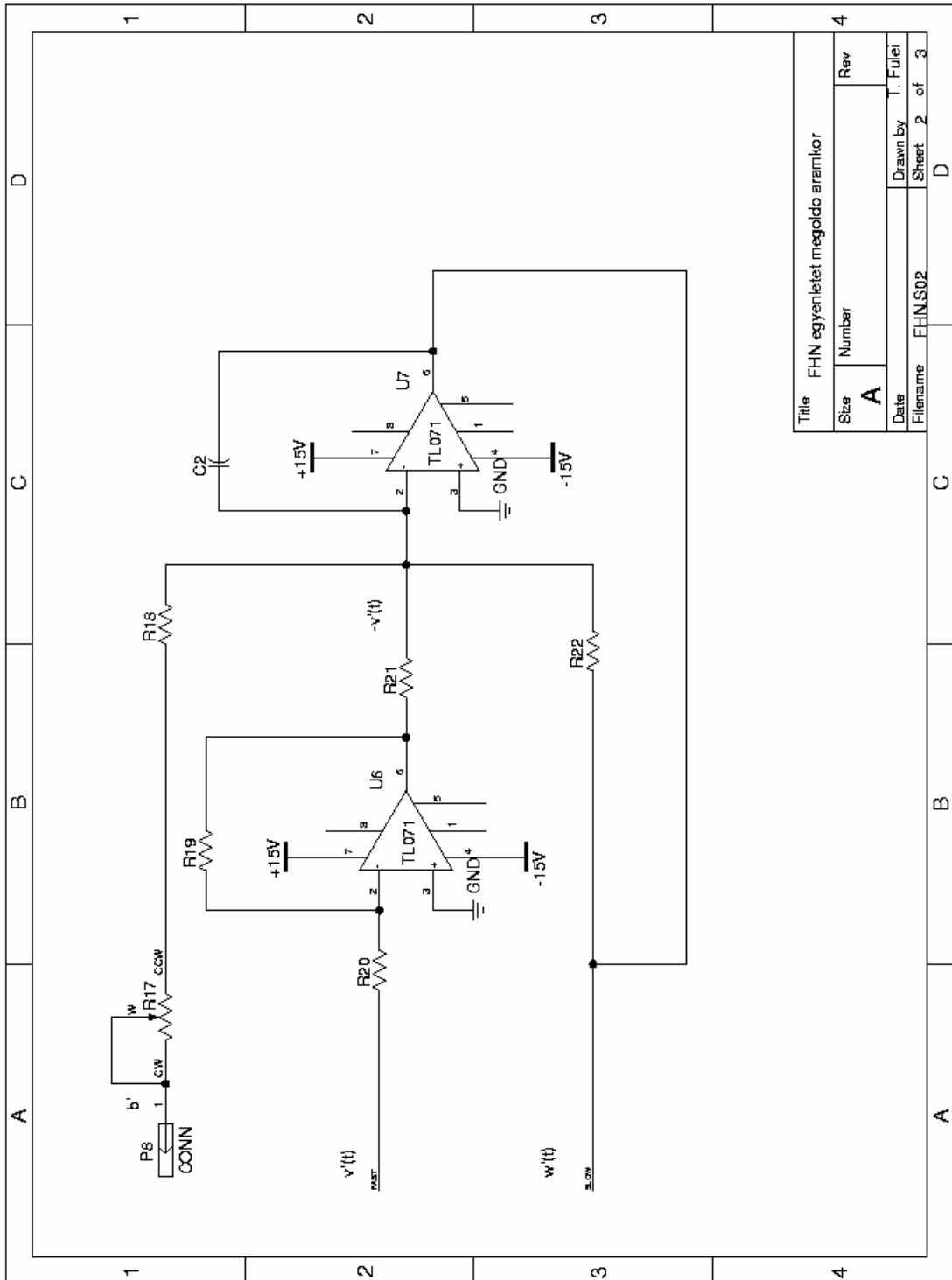


Gauss-eloszlású $1/f^\beta$ zajgenerátor

1. Függelék

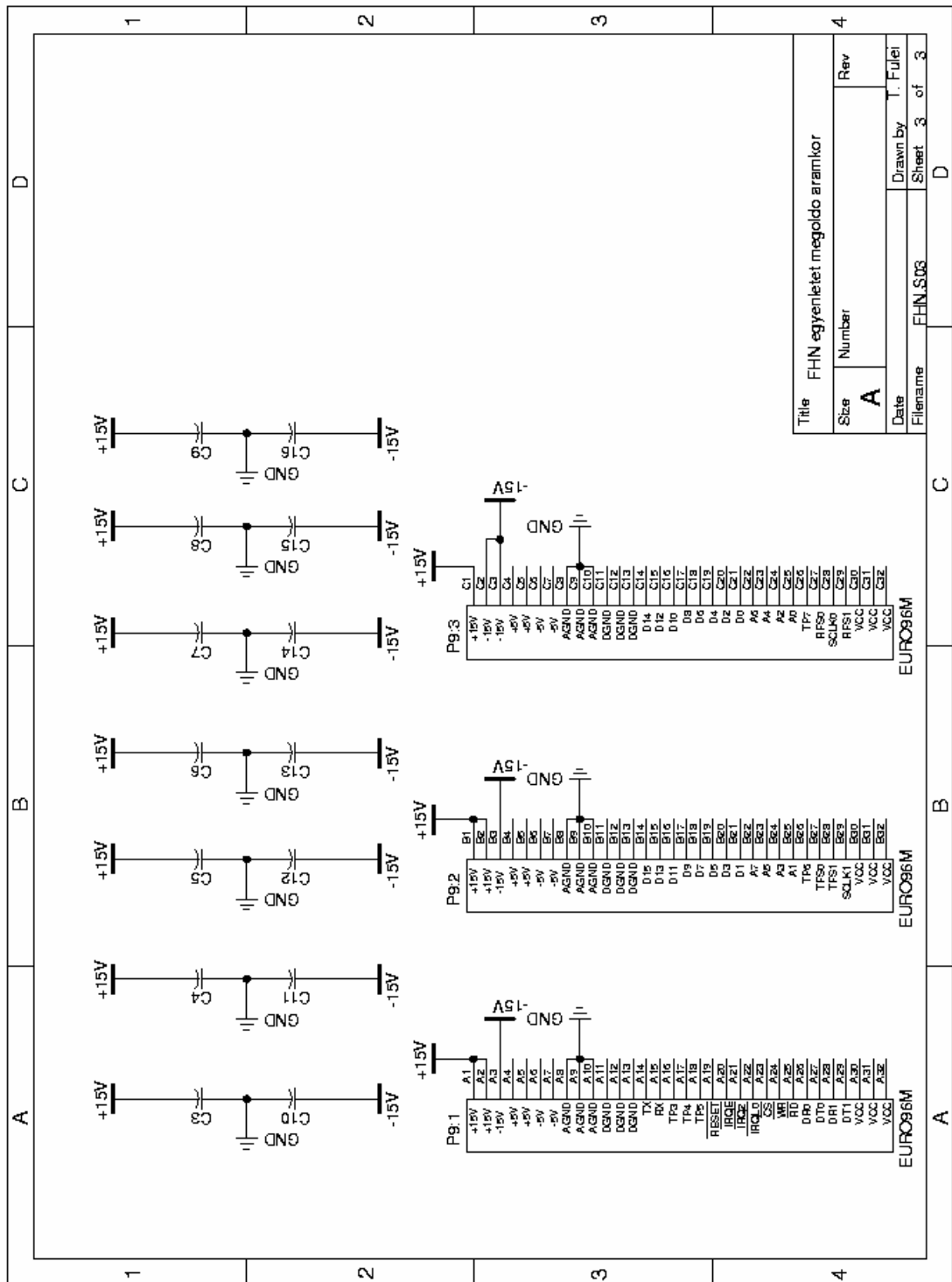


FHN áramkör kapcsolási rajza
2.1. Függelék



Title	FHN egyenletet megoldó áramkör		
Size	Number	Rev	
A			
Date	Drawn by	1. Fülel	
Filename	FHN.SD2	Sheet	2 of 3

FHN áramkör kapcsolási rajza
2.2. Függelék



9.Irodalomjegyzék:

- [1] Stochastic resonance in biological systems Chaos, Solitons and Fractals 11 (2000) 1819-1822
- [2] D.Nozaki/Y.Yamamoto: Enhancement of stochastic resonance in a FitzHugh-Nagumo neuronal model driven by colored noise/ Physics Letters A **243** (1998) 281-287
- [3] L.Gammaitoni, P.Hanggi, P.Jung, F.Marchesoni: Stochastic Resonance /Reviews of Modern Physics Vol.70.No.1 January 1998
- [4] Donatella Petracchi: What is the role of stochastic resonance? Chaos, Solitons and Fractals 11 (2000) 1827-1834
- [5] V.S. Anishchenko, A. B. Neiman, F. Moss, L. Schimansky-Geier: Stochastic resonance: noise-enhanced order Physics Uspekhi **42** (1) 7 36 (1999)
- [6] J.K. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazeolu, F. Moss, Nature (London) 365 (1993) 34
- [7] Z. Gingl, R. Vajtai, L.B. Kiss: Signal-to-noise ratio gain by stochastic resonance in a bistable system Chaos, Solitons and Fractals 11 (2000) 1929-1932
- [8] Dr. Schnell László: Jelek és rendszerek mérés technikája Műszaki Könyvkiadó 1985
- [9] Norbert Hesselmann: Digitális jelfeldolgozás, Műszaki könyvkiadó, Budapest 1985
- [10] Dr. Ambrózy András: Elektronikus zajok, Műszaki Tankönyvkiadó 1972
- [11] Noise in physical systems, edited by A. Ambrózy, 1990
- [12] Maróti Péter-Laczkó Gábor: Bevezetés a biofizikába, JATEPress 1998
- [13] William F. Ganong: Az orvosi élettan alapjai, Medicina, Budapest 1994
- [14] <http://www.ni.com> 2000