

József Attila Tudományegyetem
Természettudományi Kar

**AZ 1/F ZAJ NEMLINEÁRIS AMPLITÚDÓ
TRANSZFORMÁCIÓJÁNAK VIZSGÁLATA**

Szakedolgozat

Bózsó Attila
fizika tanár szakos hallgató

Témavezető:

Dr. Gingl Zoltán

JATE, Kísérleti Fizikai Tanszék

Szeged

1999

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS.....	3
2. A ZAJOK MATEMATIKAI LEÍRÁSA.....	5
2.1. Statisztikus jellemzők.....	5
2.1.1. A középérték.....	5
2.1.2. A bekövetkezési valószínűség, várható érték.....	6
2.1.3. Sztochasztikus jelek jellemzése folytonos értékészlet esetén..	7
2.1.3.1. Valószínűségi sűrűségfüggvények.....	7
2.1.3.2. Várható érték, szórásnégyzet.....	8
2.1.4. Több valószínűségi változó.....	9
2.1.4.1. A centrális határeloszlási tétel.....	10
2.1.5. A Gauss-eloszlás.....	11
2.2. Sztochasztikus folyamatok időfüggő tulajdonságainak leírása.....	12
2.2.1. Időátlag, stacionaritás, ergodikus folyamatok.....	13
2.2.2. Autokorreláció-, keresztkorreláció-függvény.....	14
2.3. A sztochasztikus folyamatok frekvencia-tartománybeli leírása.....	15
2.3.1. A teljesítménysűrűség-spektrum, Wiener-Hincsin összefüggések	16
2.4. Mintavételi tétel, diszkrét Fourier-transzformáció.....	17
2.5. A zajok osztályozása spektrális eloszlás szerint.....	20
2.5.1. A fehérzaj.....	20
2.5.2. Az $1/f^2$ zaj.....	21
2.5.3. Az $1/f$ zaj.....	22
2.5.4. Lorentzi zajok.....	24
2.6. Néhány jellegzetes zajtípus fizikai okai.....	25
2.6.1. A sörétzaj.....	25

2.6.2. Termikus zaj.....	26
2.6.3. A Brown-mozgás.....	27
3. AZ 1/F ZAJ NEMLINEÁRIS AMPLITÚDÓ TRANSZFORMÁCIÓJÁNAK VIZSGÁLATA	28
3.1. A modellezés lépései.....	29
3.1.1. Gauss-eloszlású véletlenszám generálása.....	29
3.1.2. 1/f zaj előállítási módszerek.....	31
3.1.2.1. Független Lorentzi zajok összegzése.....	32
3.1.2.2. Fehérzaj teljesítménysűrűség-spektrumának átskálázása...	32
3.1.3. Az amplitúdó csonkolása	34
3.1.3.1. A várható érték és a szórás meghatározása.....	35
3.2. A szintmetszés szimmetrikus esetre.....	36
3.3. A szintmetszés aszimmetrikus esetre	42
4. ÖSSZEFOGLALÁS.....	48
IRODALOMJEGYZÉK.....	50
FÜGGELÉK.....	52
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	55

1. BEVEZETÉS

A természetben előforduló jelenségek egyik alapvető sajátossága a véletlenszerűség. Ennek okai egyrészt a jelenségek bonyolult összefüggései, illetve az, hogy a rendszer viselkedését, -főként a kvantummechanikai leírásokban- nem ok-okozati összefüggések határozzák meg. A folyamatok sztochasztikus jellegének alapvető szerepe van a méréselméletben is. Egy fizikai rendszer vizsgálata során, a mért fizikai mennyiségek statisztikus ingadozása sokszor mint a mérést korlátozó tényező jelentkezik, ugyanakkor mivel ez a sztochasztikus ingadozás lehet a rendszer alapvető sajátossága, egyúttal információt is hordoz. Ahhoz azonban, hogy a rendszer fluktuációjából információt nyerhessünk, pontos fizikai és matematikai modellre van szükségünk. Ezért is fontos, hogy a fluktuációkat minél jobban megismerjük.

A szakdolgozat tárgya egy speciális zajtípus, az $1/f$ zaj, mely nevét onnan kapta, hogy a teljesítménysűrűség-spektruma a frekvenciával fordítottan arányos. Először elektronikai rendszerekben vették észre, de később kiderült, hogy a természetben igen széles körben előforduló zajtípusról van szó. Megtalálható anyagok vezetőképességének fluktuációjában [1, 2], szupravezetőkben [3], lézerekben [4], biológiai rendszerekben [5], de különös módon a folyók vízszintjének ingadozásában [6], zenében [7], gazdasági adatokban [8] is.

Annak ellenére, hogy a természetben igen gyakran előforduló zajtípusról van szó, kielégítő általános elmélet mind a mai napig nem

létezik. Bár vannak $1/f$ modellek [13, 15], ezek többnyire csak speciális esetekre, illetve szűk frekvencia tartományra korlátozódnak.

A modellalkotás mellett igen hasznosak azok a kutatások, melyek az $1/f$ zaj tulajdonságait elemzik. A dolgozat célja, hogy egy speciális, nemlineáris amplitúdó transzformációt alkalmazva az $1/f$ zajra, megvizsgáljuk, hogy hogyan változik meg a zaj teljesítménysűrűség-spektruma. Ennek érdekében numerikus szimulációt végeztünk.

A dolgozat első része bemutatja a zajok vizsgálatában leggyakrabban használt matematikai eszközöket, tárgyalja a legalpvetőbb zajok fizikai okait és tulajdonságait. Ismerteti a zajok számítógépes modellezésének elvét, majd megadjuk a szimulációhoz használt $1/f$ zajt generáló módszert, illetve az elvégzett amplitúdó transzformációt. Az utolsó részben kerül sor az eredmények ismertetésére.

2. A ZAJOK MATEMATIKAI LEÍRÁSA

2.1. Statisztikus jellemzők

A természetben végbemenő folyamatokat determinisztikus, vagy sztochasztikus folyamatokra oszthatjuk, attól függően, hogy a rendszer t_0 időpillanatbeli állapotát ismerve kiszámítható-e a rendszer állapota egy tetszőleges t időpillanatban. Ha a folyamat kimenetelét csak közelítőleg adhatjuk meg akkor sztochasztikus folyamatról beszélünk. Az ilyen jelenségek tárgyalásában segítenek a valószínűségelmélet módszerei. Ebben a fejezetben az ehhez szükséges fogalmakat tekintjük át.

2.1.1. A középérték

Egy fizikai rendszerben zajló folyamathoz egy, vagy több változót rendelhetünk, mely a valóságban valamely fizikai mennyiségnek felel meg. Tegyük fel, hogy egy mérés során U feszültséget mérünk, ami véletlenszerű ingadozást mutat egy U_0 érték körül. Hogyan jellemezhető ekkor az U valószínűségi változó? Tegyük fel, hogy N mérésből egy bizonyos U_k értéket n_k -szor mértünk, ebből megkaphatjuk U középértékét:

$$U(N) = \sum_k \frac{n_k}{N} \cdot U_k, \quad 2.1$$

ahol N a mérések száma, k egy pozitív egész, mely annyi értéket vehet fel, ahány különböző U_k érték létezik, n_k pedig az U_k előfordulásának számát adja.

Ha azonban csak ezt a középértéket ismerjük, az elég kevés információt ad a folyamatról, hiszen ekkor nem tudjuk, hogy milyen más értéke lehet U -nak, illetve milyen szélsőértékek határolják.

2.1.2. A bekövetkezési valószínűség, várható érték

Tekintsük most a (2.1)-ben szereplő n_k/N hányadost, melyet az U_k relatív gyakoriságának hívunk. Ez az érték, -a nagy számok törvényének értelmében [9]- a kísérletek N növekvő száma mellett konvergál. Létezik tehát a stochasztikus konvergencia néven ismert alábbi határérték:

$$p_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_k}{N}. \quad 2.2$$

Ekkor p_k egy 0 és 1 közé eső szám, melyet a k esemény bekövetkezési valószínűségének nevezünk. Esetünkben p_k megadja, hogy a mérés során milyen valószínűséggel kaphatunk U_k értéket. Igaz továbbá az alábbi összefüggés:

$$\sum_k p_k = 1, \quad 2.3$$

ahol az összegzést k minden lehetséges értékére el kell végezni.

A p_k valószínűségek segítségével megadható a folyamat $M(U)$ várható értéke:

$$M(U) = \sum_k U_k p_k. \quad 2.4$$

A fentiekből következik, hogy a kapcsolat az $M(U)$ várható érték és a mérésekből kapható $U(N)$ középérték között:

$$M(U) = \lim_{N \rightarrow \infty} U(N). \quad 2.5$$

A p_k értékek számot adnak a folyamat ingadozásáról is. Elkerülendő azonban, hogy ehhez meg kelljen adni az összes p_k értéket, célszerű bevezetni egy új mennyiséget a szórás, amit jelöljünk $D(U)$ -val:

$$D(U) = \sqrt{\sum_k (U_k - M(U))^2 p_k}. \quad 2.6$$

A $D(U)$ szórás egy számmal jellemzi, hogy az U mennyiség mennyire korlátozódik egy szűk tartományra. Természetesen a p_k valószínűségek többet mondanak a folyamatról, mint a várható érték vagy a szórás, de a gyakorlatban sokszor elegendő csak ezeket vizsgálni.

2.1.3. *Sztocasztikus jelek jellemzése folytonos értékkészlet esetén*

Eddig feltételeztük, hogy az U feszültség csak bizonyos diszkrét értékeket vehet fel, ezt az indokolta, hogy egyrészt a mérőműszerek pontatlansága határt szab a mérési adatok értékeinek, másrészt a számítógépes feldolgozás során eleve digitalizáljuk azokat. A szakdolgozat készítése során végzett számítógépes szimuláció is úgy tekinthető, mint egy a természetben lejátszódó folyamat diszkrét realizációja. Mindezek ellenére szükség van a folytonos értékek kezelésére is, ahol nem korlátozzuk a különböző U_k feszültségértékek számát.

2.1.3.1. *Valószínűségi sűrűségfüggvények*

A diszkrét értékek tárgyalásában központi fogalom volt az esemény bekövetkezési valószínűsége, hogyan definiálható ez folytonos

értékkészlet esetén? Mivel ekkor egy adott U érték előfordulásának valószínűsége nullával lesz egyenlő a valószínűségek összegére vonatkozó feltétel miatt (2.1.2 fejezet), ezért az előfordulási valószínűséget nem használhatjuk folytonos értékkészletű valószínűségi folyamatok leírására. A problémát úgy oldhatjuk meg, hogy keresünk egy olyan $p(U)$ függvényt, melyre igaz, hogy a $p(U)dU$ szorzat megadja, hogy milyen valószínűséggel esik a feszültség az U körüli kicsiny dU intervallumba. Ezt a $p(U)$ függvényt valószínűségi sűrűségfüggvénynek nevezzük. Ekkor a valószínűségek összegére vonatkozó (2.3) összefüggés a következő alakú:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(U)dU = 1. \quad 2.7$$

2.1.3.2. *Várható érték, szórásnégyzet*

A fentiekben definiált valószínűségi sűrűségfüggvény most már lehetővé teszi, hogy folytonos értékkészletű sztochasztikus folyamatokra is definiáljuk a már korábban bevezetett fogalmakat. Az összegzésről integrálásra áttérve kaphatjuk meg, a várható érték és a szórásnégyzet definícióját, vagyis:

$$M(U) = \int_{-\infty}^{\infty} U \cdot p(U) dU, \quad 2.8$$

$$D^2(U) = \int_{-\infty}^{\infty} (U - M(U))^2 p(U) dU. \quad 2.9$$

2.1.4. Több valószínűségi változó

Gyakran előfordul, hogy olyan fizikai mennyiség leírására van szükség, ami több összetevőből áll, melyekhez külön valószínűségi változót rendelünk. Mi a kapcsolat ilyenkor a vizsgált mennyiség és annak összetevőjéhez rendelt valószínűségi sűrűségfüggvények között? Ilyenkor először azt kell eldönteni, hogy a két mennyiség független-e egymástól, vagyis az egyik mennyiség adott értéke befolyásolja-e a másik valószínűségi sűrűségfüggvényét?

A valószínűségelmélet szerint az X_1, X_2, \dots, X_n események függetlenek, ha bárhogyan is választunk ki közülük (ismétlés nélkül) k számú eseményt ($k=2,3, \dots, n$), ezek együttes valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségeinek szorzatával [10].

A fentieket felhasználva könnyen belátható, hogy két sztochasztikusan független X, Y mennyiség esetén, ha $Z=X+Y$ akkor:

$$M(Z) = M(X) + M(Y), \quad 2.10$$

$$D^2(Z) = D^2(X) + D^2(Y), \quad 2.11$$

illetve, az eredő sűrűségfüggvény a kiindulási sűrűségfüggvények konvolúciójával nyerhető [11]:

$$p_z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x') p_y(x'-x) dx'. \quad 2.12$$

2.1.4.1. A centrális határeloszlási tétel

Egy makroszkopikus mennyiség fluktuációja általában igen sok elemi fluktuáció eredőjeként áll elő. Egyszerű példa erre az elektromos vezetőképesség ingadozása, mely az elemi töltéshordozók mozgásának és mennyiségének véletlenszerű változásaiból származik. Az ilyen véletlenszerű folyamatok eredő sűrűségfüggvényének meghatározásához nyújt segítséget a centrális határeloszlási tétel. A tétel kimondja, hogy nagy számú, független valószínűségi változók összegének eloszlása az úgynevezett normális vagy más néven Gauss eloszláshoz tart, melynek sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad 2.13$$

A tétel elég általános feltételek mellett igaz. A konvergencia sebessége az összetevő folyamatok sűrűségfüggvényeitől függ.

2.1.5. A Gauss-eloszlás

Ha egy X valószínűségi változó $p(x)$ sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad 2.14$$

ahol m és σ adott állandók akkor az X valószínűségi változót normális vagy Gauss-eloszlásúnak nevezzük (2.1 ábra). A gyakorlatban ez az eloszlás igen gyakran fordul elő. A szakdolgozat készítésekor a numerikus szimulációt során is ilyen eloszlású folyamatokat modelleztünk ezért érdemes ennek az eloszlásnak néhány fontos tulajdonságát áttekinteni. A Gauss-eloszlás várható értéke és szórása [10]:

$$M(x) = m, \quad 2.15$$

$$D(x) = \sigma. \quad 2.16$$

Egy másik, gyakorlati szempontból fontos tulajdonsága a Gauss-eloszlásnak a háromszigma-szabály néven ismeretes. Ez a szabály kimondja, hogy Gauss-eloszlású X valószínűségi változó értéke

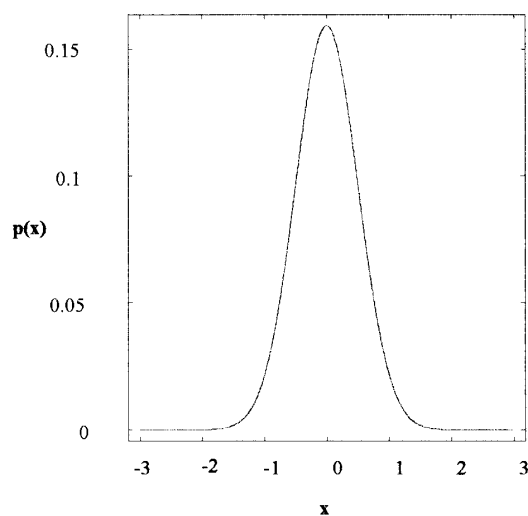
$$P_{3\sigma} \cong 0,997 \quad 2.17$$

valószínűséggel esik a $(m-3\sigma, m+3\sigma)$ intervallumba [10]. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az eloszlás $(m-3\sigma, m+3\sigma)$ intervallumon kívül eső része gyakorlatilag elhanyagolható. Hasonlóan:

$$P_{\sigma} \cong 0.841 \quad 2.18$$

$$P_{2\sigma} \cong 0,977. \quad 2.19$$

A fentiek jól láthatók az 2.1 ábrán is mely egy $m=0$ várható értékű, $\sigma=1$ szórású, normális eloszlású x valószínűségi változó $p(x)$ sűrűségfüggvényét ábrázolja x függvényében.



2.1 ábra

A 0 várható értékű, 1 szórású, normális eloszlású x valószínűségi változó $p(x)$ sűrűségfüggvénye.

2.2. Sztochasztikus folyamatok időfüggő tulajdonságainak leírása

Eddig nem vettük figyelembe azt, hogy egy folyamat tulajdonságai az időben változhatnak, pedig ez fontos lehet a reális folyamatok vizsgálatában. Megtehetjük, hogy az időt, mint új paraméter vezetjük be

az eddig definiált mennyiségekben, például a sűrűségfüggvény legyen $p(x,t)$ alakú. Ahhoz azonban, hogy ezt megtehessek szükség van rá, hogy valami módon meg tudjuk határozni egy folyamat valószínűségi jellemzőit. Hogyan tehetnénk ezt meg? Ahhoz, hogy sok kísérlet elvégzése eredményeként kapjunk meg például a sűrűségfüggvényt, rengeteg azonos körülmények között levő egyforma rendszerre lenne szükség, ha az időfüggéstől nem tekinthetünk el. Erre általában nincs meg a lehetőségünk, ezért szükséges újabb mennyiségeket bevezetnünk, és meghatároznunk az eddig definiált jellemzőkkel való lehetséges összefüggéseket.

2.2.1. *Időátlag, stacionaritás, ergodikus folyamatok*

Legegyszerűbb esetként vizsgáljuk meg a várható érték problémáját. Tekintsünk egy véletlenszerűen ingadozó $U(t)$ feszültséget. Az $\langle U(t) \rangle$ középvértéket mérésrel úgy adjuk meg, hogy a mérés T idejére képezzük az $U(t)$ jel átlagértékét:

$$\langle U(t) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U(t) dt, \quad 2.20$$

melyből $T \rightarrow \infty$ esetén határértékként kapjuk az $\langle U(t) \rangle$ időátlagot. Milyen kapcsolatban van ez a mennyiség az $M(U)$ várható értékkel? Ha az $M(U)$ időfüggetlen, akkor általában nem fog a két érték megegyezni, ezért első megszorításként azt mondhatjuk, hogy a statisztikai jellemzőknek időfüggetlennek kell lenniük, hogy az időbeli és sokaságra vett átlagok azonosak legyenek. Az ilyen folyamatokat stacionáriusnak nevezzük [12]. Megjegyezzük, hogy többféle stacionáriusági feltétel lehetséges aszerint, hogy hányadrendű sűrűségfüggvényre írunk elő korlátozásokat. Ha

megelégszünk az elsőrendű $p(x,t)$ és másodrendű $p(x_1,t,x_2,t+\tau)$ sűrűségfüggvények időfüggetlenségével - ami gyakorlati szempontokból sokszor fontos -, akkor a folyamatot gyengén stacionáriusnak nevezzük. Ha minden statisztikai paraméter időfüggetlen, akkor a folyamatot erősen stacionáriusnak mondjuk. A stacionaritás önmagában azonban még nem jelenti azt, hogy az időbeli és térbeli átlagok megegyeznek. Azokat a folyamatokat melyekre igaz az alábbi összefüggés:

$$M(U(t)) = \langle U(t) \rangle, \quad 2.21$$

vagyis a kétféle átlag megegyezik, ergodikus folyamatoknak nevezzük.

2.2.2. Autokorreláció-, keresztkorreláció-függvény

A továbbiakban definiálunk néhány mennyiséget, melyek a sztochasztikus folyamatok időbeli tulajdonságait írják le. Az első ilyen mennyiség az $x(t)$ sztochasztikus jel autokorreláció-függvénye:

$$R_{xx}(t, t + \tau) = M[x(t) \cdot x(t + \tau)] \quad 2.22$$

Az autokorreláció-függvény azt jellemzi, hogy a jel τ idejű eltolásával mennyire "hasonlít" önmagára. Ez tulajdonképpen a jelforrás memóriájával van kapcsolatban. Ha egy jel esetén a $t+\tau$ idejű értékek függetlenek attól, hogy a jel milyen értéket vett fel a t időpillanatban, akkor a kérdéses folyamat korrelálatlan. Ebben az esetben az autokorreláció-függvény minden τ -ra nullával egyenlő, kivéve természetesen a $\tau=0$ esetet, amikor az autokorreláció-függvény a jel négyzetének várható értékét szolgáltatja. Korrelált folyamatok autokorreláció-függvénye sokféle lehet.

Ergodikus jelek esetén az autokorreláció-függvényt a következő formulával is megadhatjuk:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt \quad 2.23$$

mivel ekkor a folyamat stacionárius, ezért az autokorreláció-függvény nem függhet az időtől, ahogy ez a formulából is látszik.

Teljesen hasonló módon vezethetjük be a keresztkorreláció-függvényt, amely két jel közötti kapcsolatot jellemez:

$$R_{xy}(t, t+\tau) = M[x(t) \cdot y(t+\tau)], \quad 2.24$$

illetve ergodikus jelekre:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt. \quad 2.25$$

A keresztkorreláció igen hasznos eszköze két sztochasztikus folyamat kapcsolatának leírására. Segítségével megadható például, hogy két sztochasztikus folyamat függ-e egymástól, és az egyik folyamat másikra való hatása milyen időeltolódással jelentkezik.

2.3. A sztochasztikus folyamatok frekvencia-tartománybeli leírása

A sztochasztikus folyamatokat sokszor nem csak az idő-, hanem a frekvencia-tartományban is vizsgáljuk. Ilyenkor az időtartománybeli jelet a Fourier-transzformáció alkalmazásával a benne fellépő harmonikus komponensekkel írjuk le. Ez a frekvencia-tartománybeli leírás ekvivalens

az időtartománybeli leírással. Eszerint, ha tetszőleges $x(t)$ folytonos jel $t \rightarrow \pm\infty$ estén véges marad akkor:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{i2\pi ft} df, \quad 2.26$$

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad 2.27$$

ahol $F(f)$ az $x(t)$ jel Fourier-transzformáltja.

2.3.1. A teljesítménysűrűség-spektrum, Wiener-Hincsin összefüggések

Stacionárius jelek frekvencia-tartománybeli vizsgálatokor gyakran használjuk az un. teljesítménysűrűség-spektrumot, mely a definíció szerint az autokorreláció-függvény Fourier-transzformáltja:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad 2.28$$

illetve inverz transzformációval:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad 2.29$$

A teljesítmény elnevezés onnan származik, hogy ha az időfüggő jel feszültség, akkor az $S_{xx}(f)df$ mennyiség azzal a teljesítménnyel azonos, ami az $f, f+df$ frekvenciatartományba esik. A teljesítménysűrűség-

spektrumot megkaphatjuk a jel úgynevezett amplitúdó-spektrumából is, melynek definíciója a következő:

$$F_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad 2.30$$

Ebből a Wiener-Hincsin összefüggések szerint:

$$S_x(f) = F_x(f) \cdot F_x^*(f), \quad 2.31$$

ahol a F_x^* az F_x komplex konjugáltját jelöli. Tehát az autokorreláció-függvény ismerete nélkül is kiszámítható a teljesítménysűrűség-spektrum. Érvényes továbbá, hogy a jel négyzetének várható értéke megadható a teljesítménysűrűség-spektrum segítségével:

$$M(x^2(t)) = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df, \quad 2.32$$

mivel a jobboldalon álló mennyiség az összteljesítményt adja meg.

2.4. Mintavételi tétel, diszkrét Fourier-transzformáció

Analóg jelek időfüggő tulajdonságainak mérésekor az alacsony-frekvenciás tartományban ma már legtöbbször digitális módszereket használunk. E tevékenység mellett szól a nagyobb pontosság, a digitalizált jelek könnyű tárolása, feldolgozása és kis zavarérzékenysége. A digitális jelfeldolgozás során az analóg jel értékeit először Δt időközönként mintavételezzük, majd az így kapott diszkrét értékeket dolgozzuk fel. Ez utóbbi azt jelenti, hogy az $x(t)$ jel értékeit csak bizonyos t_0, t_1, \dots, t_n időpillanatokban ismerjük. A mintavételezés során érdemes a mintavételi

időpontokat ekvidisztánsra választani, ekkor beszélünk periodikus mintavételezésről. A továbbiakban periodikus mintavételezést tételezünk fel. A fentiek értelmében tehát az $x(t)$ folytonos függvényt az alábbi mintavételezett függvénnyel helyettesítjük:

$$x_m(t) = \Delta t \sum_i x(t_i) \delta(t - t_i), \quad 2.1$$

ahol Δt a két szomszédos mintavételi időpont különbsége, $x_m(t)$ a mintavételezéssel nyert függvény, δ pedig a Dirac-féle függvény. Felmerül azonban a kérdés, hogy milyen feltételek mellett tehetjük meg ezt információvesztés nélkül? Erre ad választ a digitális jelfeldolgozás egyik központi tétele, a mintavételezési tétel.

Ha az $x(t)$ jel Fourier felbontásában az f_o -nál nagyobb frekvenciájú komponensek amplitúdója nulla, akkor a jelet teljes mértékben meghatározzák az $1/2f_o$ időközönkénti mintái a következő formula szerint:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{i}{2f_o}\right) \frac{\sin \pi 2 f_o \left(t - \frac{i}{2f_o}\right)}{\pi 2 f_o \left(t - \frac{i}{2f_o}\right)} \quad 2.34$$

A tétel elég egyszerűen belátható. Az $X(f)$ Fourier-transzformált a feltételek szerint a $(-f_o, f_o)$ intervallumra korlátozódik, tehát létezik a következő Fourier sora:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\pi f \frac{n}{f_0}} \quad 2.35$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2f_0} \int_{-f_0}^{f_0} X(f) e^{i\pi n \frac{f}{f_0}} df \quad 2.36$$

Mivel azonban

$$x(t) = \int_{-f_0}^{f_0} X(f) e^{i2\pi ft} dt \quad 2.37$$

így $c_n = x(n/2f_0)/2f_0$. A c_n együtthatók teljesen meghatározzák az $X(f)$ transzformáltat, ezáltal magát az $x(t)$ jelet is, tehát a tételt igazoltuk.

A mintavételi tételnek ellentmondó mintavétel meghamisítja a jelet. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha a mintavételi frekvencia $2f_0$, akkor minden $f+2nf_0$ frekvenciájú szinuszos jelnek azonos mintavételezett függvény felel meg (n egész szám). Hasonló kijelentés igaz az $f+(2n+1)f_0$ frekvenciájú periodikus jelekre is. Ez különösen a spektrum mérésében tükröződik, mivel a helytelen mintavételezés miatt a különböző frekvenciákhoz tartozó komponensek összeadódnak, ezáltal meghamisítják a spektrumot. Abban az esetben tehát, ha nem tudjuk betartani a mintavételi tételt, akkor a mintavételezés előtt aluláteresztő szűrőt kell alkalmaznunk.

Az $x(t)$ jel mintavételezése során a gyakorlatban egy véges számú adatsort kapunk, ami N számú x elemből áll. A spektrum kiszámítására ekkor a mintavételezett függvény alakjának figyelembe vételével a következő formulát kapjuk:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi \frac{kj}{N}}$$

Itt tehát x_i az $x(i\Delta t)$ mennyiségnek felel meg, és F az úgynevezett diszkrét Fourier-transzformált, $k=0..N-1$. Látható, hogy maga a transzformált is diszkrét, mivel az időtartomány véges hosszúságú. Az $F_k=F(k\Delta f)$ formula lényegében a spektrum mintavételezését jelenti, ahol $\Delta f=(1/N)\Delta t$.

A diszkrét Fourier-transzformált kiszámítása igen időigényesnek tűnhet, mivel az összes F komponens meghatározásához a formula szerint N komplex szorzásra van szükség. A komplex exponenciális függvény tulajdonságait kihasználva azonban a feladat megoldható $N\log_2 N$ művelettel is, ami rendkívül nagy különbséget jelent nagy N -ek esetén. Ezt az eljárást Cooley és Turkey fejlesztette ki, és gyors Fourier-transzformáció (továbbiakban FFT) néven ismert [17]. A gyors Fourier-transzformáció a számítógépes jelfeldolgozás egyik alapvető eszköze.

2.5. A zajok osztályozása spektrális eloszlás szerint

A különféle eredetű zajok egy lehetséges osztályozását a teljesítménysűrűség-spektrumuk alapján is megadhatjuk.

2.5.1. A fehérzaj

Az olyan zajokat melyek teljesítménysűrűség-spektruma konstans, fehérzajnak nevezzük:

$$S(f) = \text{konst.} \quad 2.39$$

A képletből látszik, hogy az autokorrelációs függvénye a Dirac-féle α függvény, ami azt jelenti, hogy nincs korreláció a jel értékei között. Energiáját ilyenalakban kiszámolva, végtelen adódik. A valóságban

előforduló fehérzajú jelek sávkorlátozottak. Ilyen tulajdonságú például a termikus, vagy sörét zaj (2.6 fejezet).

2.5.2. Az $1/f^2$ zaj

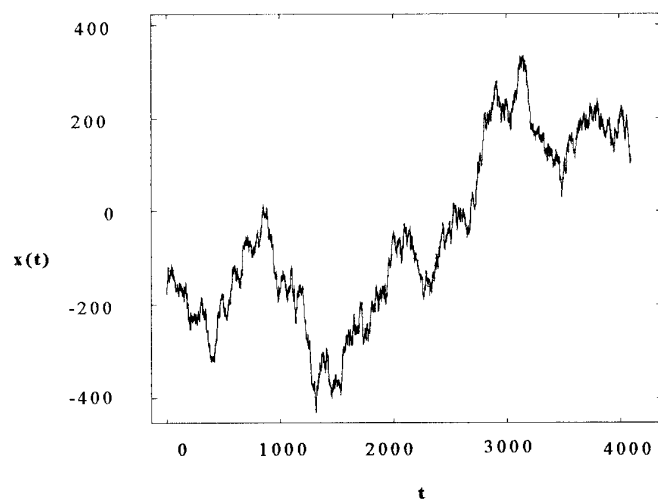
Abban az esetben, ha egy zaj teljesítménysűrűség-spektruma a következő alakú:

$$S(f) = c \cdot \frac{1}{f^2}, \text{ ahol } c = \text{konstans}, \quad \mathbf{2.40}$$

akkor $1/f^2$ zaj-ról beszélünk (2.2, 2.3 ábra). A természetben igen gyakran előforduló zajtípus, mivel gyakori jelenség, hogy egy mennyiség egy másik mennyiség integrálja. Ekkor a Fourier-transzformáció

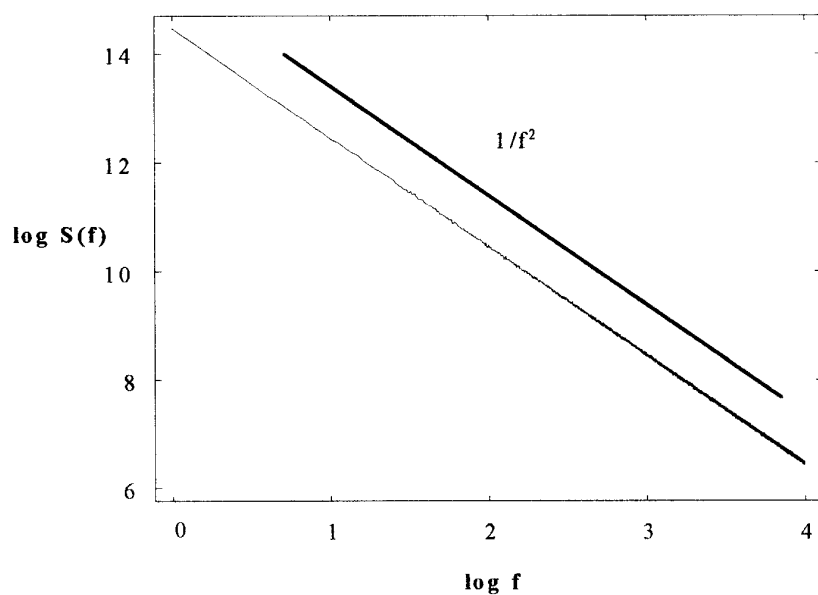
$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (i2\pi f)^n F(f) \quad \mathbf{2.41}$$

tulajdonsága miatt a fehérzaj időbeli integráljaként adódó zaj $1/f^2$ spektrumú. Ilyen zaj például Brown-mozgás (2.6.3).



2.2 ábra

Az egy dimenziós brown-mozgás kitérés-idő függvénye



2.3 ábra

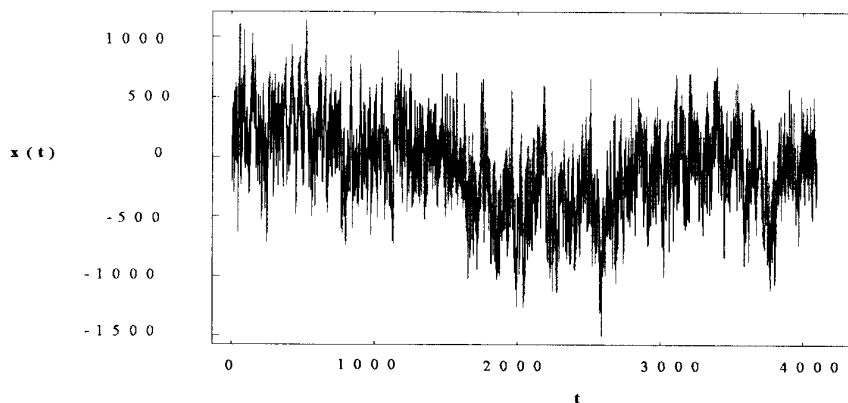
Az egy dimenziós brown-mozgás teljesítménysűrűség-spektruma

2.5.3. Az 1/f zaj

Ezt a zajtípust (ami Flicker-zaj néven is ismeretes) először az elektronika területén fedezték fel [1] és a kezdeti kutatások is ebben az irányban folytak. Széles körben előfordul félvezető eszközökben, vékony fémréteg ellenállásokban, elektroncsövekben. Később az élet sok más területein is rábukkantak, mint például biológiai rendszerekben [5], gazdasági folyamatokban [8], a zenében [7]. Ebbe a csoportba az olyan:

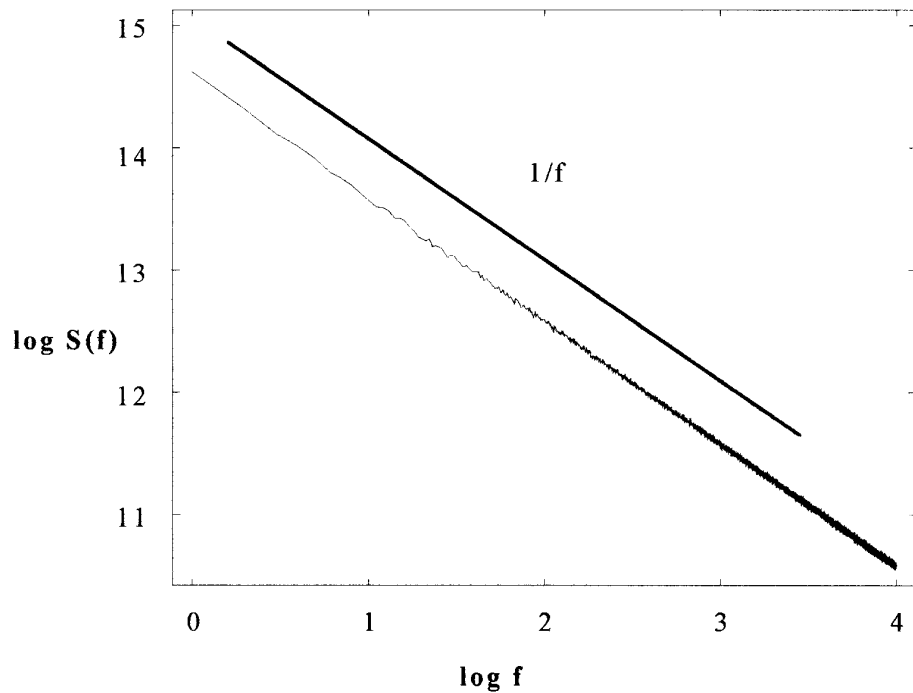
$$S(f) \approx \frac{1}{f^\alpha} \quad 2.42$$

teljesítménysűrűség-spektrumú fluktuációkat soroljuk melyekre $\alpha \approx 1$. Az α pontos értékére nincs igazán egységes álláspont, elfogadható érték például az $\alpha=1.2$, de $\alpha=1.5$ vagy $\alpha=0.5$ már nem. A szigorúan $\alpha=1$ jel energiájára végtelen adódik, ezért reális esetben az 1/f zaj sávkorlátozott. Széleskörű előfordulása ellenére mind a mai napig nincs rá egységes modell.



2.4 ábra

Egy 1/f zaj $x(t)$ amplitúdója az idő függvényében



2.5 ábra

Az 1/f zaj teljesítménysűrűség-spektruma

2.5.4. Lorentzi zajok

Az exponenciális lecsengésű autokorreláció-függvénnyel rendelkező zajok teljesítménysűrűség-spektruma a Wiener-Hincsin-tételből következően Lorentzi:

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \leftrightarrow S(f) = C \frac{\tau_0}{1 + (2\pi f \tau_0)^2}. \quad \mathbf{2.43}$$

Ilyen tulajdonságúak például a Poisson-folyamatok. Ha egymástól független Poisson-folyamatokat összegzünk, és a τ_0 értékre pedig

$g(\tau_0)=1/\tau$ eloszlást feltételezünk, akkor sávkorlátozott $1/f$ zajt kapunk [25].

2.6. Néhány jellegzetes zajtípus fizikai okai

Az előforduló zajtípusokat többféle módon osztályozhatjuk, részben az előzőekben bevezetett mennyiségek, részben létrejöttük fizikai okai szerint is. Tekintsünk most át néhány jellegzetes zajtípust!

2.6.1. A sörétzaj

A sörétzaj olyankor fordul elő, amikor a töltéshordozó részecskéknek potenciálgátat kell leküzdeniük ahhoz, hogy a vezetéshez hozzájáruljanak. Nevét onnan kapta, hogy ha megfelelően kihangosítjuk, akkor sörétek potyogására emlékeztető hangot hallunk. Ilyen zajt produkál például egy vákuumdióda, vagy egy félvezető pn átmenet is. A vákuumdiódánál az elektronoknak ahhoz, hogy katódból kiléphessenek egy minimális ε_0 energiával kell rendelkezniük. Mivel az energia az egyes elektronok között véletlenszerűen oszlik el, ezért az elektronok kilépése is véletlenszerű. Ha egy elektron energiája nagyobb a kilépési munkánál, akkor a kilépés után a külső elektromos tér hatására az anód felé halad egyenletes gyorsulással, és így hozzájárul a körben folyó áramhoz. Az áram tehát elemi, egymást véletlenszerűen követő áramimpulzusok összegeként fogható fel.

Tegyük fel, hogy az impulzusok Dirac-függvények, ekkor figyelembe véve, hogy az elektronok kilépése Poisson eloszlást követ, az áram spektruma a következő [13]:

$$S(f) = 2qI, \quad 2.44$$

ahol q az elemi töltés, I pedig az áram középértéke. Tehát a sörétzaj spektruma ekkor konstans. Valójában az impulzusok nem Dirac-függvények így a fenti (2.44) formula módosul. A vákuumdióda esetében például az elektron egyenletes gyorsulása következtében az elemi impulzus a t_r áthaladási időtartamban lineárisan növekvő függvény, a pn átmenet esetén pedig, a közel konstans sebesség miatt t_r szélességű négyszögjellel adható meg. Mivel az eredő spektrumot az elemi impulzusok alakja határozza meg [14], ezért például a pn átmenet esetében az áram spektruma:

$$S(f) = 2qI \left(\frac{\sin \frac{2\pi f t_r}{2}}{\frac{2\pi f t_r}{2}} \right)^2. \quad 2.45$$

Ez azt jelenti, hogy a spektrum most csak kis frekvenciákon lesz közelítőleg konstans, vagyis amikor a $\sin(\pi f t_r)/\pi f t_r$ közelítőleg 1.

2.6.2. Termikus zaj

Homogén vezetőkben nincs potenciálgát, zaj azonban mégis keletkezik bennük még árammentes állapotban is. Ennek az oka az, hogy a vezetőkben kristályhibák, szennyező atomok vannak, illetve a kristály periodicitását az atomok hőmozgása is zavarja. A töltéshordozók ezekkel a hibahelyekkel ütköznek, mely során energiájuk megváltozhat. Mivel ezek az ütközések véletlenszerűek, így az eredő áram illetve feszültség is ingadozik. Ekkor a termikus zajfeszültség teljesítménysűrűség-

spektrumára anyagtól függetlenül, az úgynevezett Nyquist-formulát kapjuk [13]:

$$S(f) = 4kTR, \quad 2.46$$

ahol k a Boltzmann állandó, R a minta ellenállása, T a hőmérséklet.

2.6.3. A Brown-mozgás

A Brown-mozgás jól ismert probléma a fizikában. A jelenséget röviden az jellemzi, hogy egy részecske környezetének kölcsönhatására véletlenszerűen mozog. Ezt a következő egyenlet írja le:

$$m \frac{dv}{dt} + \gamma v = F(t), \quad 2.47$$

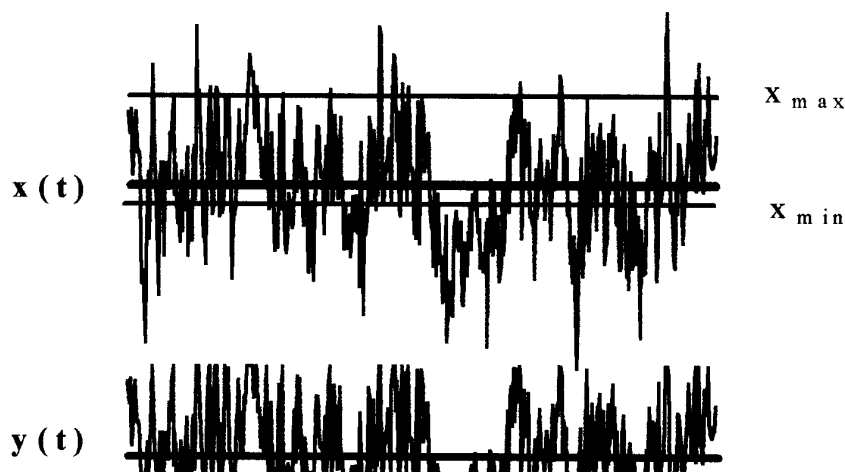
ahol m a részecske tömege, v a sebessége, γ a közegellenállási együttható, $F(t)$ pedig a részecskére ható véletlenszerű erő, melyet Gauss-eloszlásúnak és korrelálatlannak tételezünk fel. A fenti képletből is látszik, hogy a folyamat nem korrelálatlan, hiszen a részecske adott időpillanatbeli helyzete függ az azt megelőzőtől. Jellegzetessége, hogy teljesítménysűrűség-spektruma széles frekvenciatartományban $1/f^2$ -el arányos, illetve a szórásnégyzet az idővel arányosan növekszik, tehát a folyamat erősen nem stacionárius. A (2.2, 2.3) ábrákon egy egydimenziós Brown mozgás jelalakja és spektruma látható

3. AZ 1/F ZAJ NEMLINEÁRIS AMPLITÚDÓ TRANSZFORMÁCIÓJÁNAK VIZSGÁLATA

Néhány évvel ezelőtt kísérletek során az 1/f zaj egy különös tulajdonságára bukkantak [18, 19]: azt tapasztalták, hogy az 1/f zaj teljesítménysűrűség-spektruma változatlan maradt, annak ellenére, hogy az eredeti zaj amplitúdóját jelentős mértékben csonkolták a következő módon:

$$y(t) = \begin{cases} x_{\min}, & \text{ha } x(t) \leq x_{\min} \\ x_{\max}, & \text{ha } x(t) \geq x_{\max} \\ x(t), & \text{különben} \end{cases} \quad 3.1$$

Itt az $x(t)$ az eredeti Gaussi 1/f zaj amplitúdója, $y(t)$ a csonkolt jel amplitúdója, x_{\min} illetve x_{\max} pedig a csonkolás szintjei. Az (3.1) ábrán egy ilyen transzformációt láthatunk.



3.1 ábra

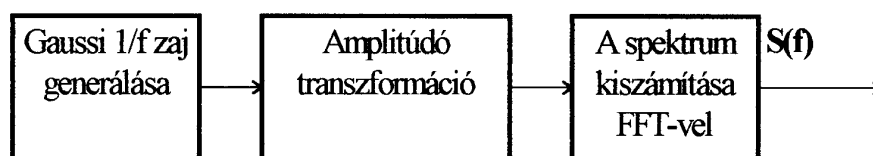
Az 1/f zaj amplitúdó csonkolása

A szakdolgozat készítésekor ennek a nemlineáris amplitúdó transzformációnak egy speciális esetét modelleztük. A modellezésre mind elméleti, mind analóg illetve számítógépes szimuláció útján is lehetőség van. Mi ez utóbbi módszert választottuk.

A fejezet hátralevő részében áttekintjük a szimuláció lépéseit, illetve ismertetjük a modellezés során kapott eredményeket.

3.1. A modellezés lépései

A számítógépes modellezés során Gauss-eloszlású $1/f$ teljesítménysűrűség-spektrumú zajt generáltunk, ezen hajtottuk végre az amplitúdó csonkolás, majd az így kapott zaj teljesítménysűrűség-spektrumát vizsgáltuk. A modellezés menete a következő volt:



3.2 ábra

A számítógépes modellezés lépései

A teljesítménysűrűség-spektrumot, a csonkolás után kapott zajból FFT-vel állítottuk elő. Tekintsük most át az egyes lépéseket.

3.1.1. Gauss-eloszlású véletlenszám generálása

Felvetődik a kérdés, hogy hogyan tudunk zajt modellezni számítógéppel? Kézenfekvőnek tűnik a megoldás, hogy mivel a zajok véletlenszerű, sztochasztikus jelek sorának tekinthetők, ezért a

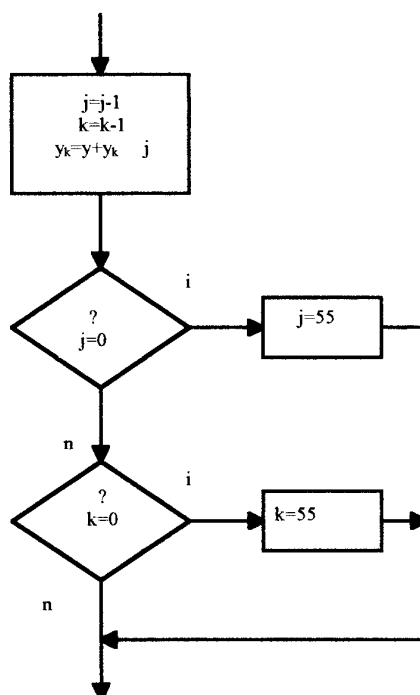
modellezés során véletlenszám sorozatot generáljunk, majd tekintsük ezt a sorozatot egy valós zaj diszkrét reprezentációjának.

Az irodalom többféle módszert ismer egyenletes eloszlású véletlenszámok generálására [16]. Mi a zajok numerikus szimulációja során az úgynevezett additív véletlenszám-generátort használtuk, amelynek a definíciója a következő:

3.2

$$r_i = (r_{i-24} + r_{i-55}) \bmod M$$

ahol r_i jelenti a generált számokat, M pedig egy alkalmasan választott nagy szám, esetünkben 2^{32} , ami a számítógép szóhosszának felel meg. Az additív véletlenszám-generátor pontos algoritmus az (3.3) ábrán látható.



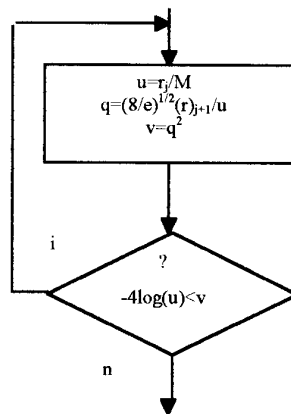
3.3 ábra

Az additív véletlenszám generáló algoritmus

A fenti módszerrel kapott véletlenszámokból Gauss-eloszlású véletlen számokat a centrális határeloszlási tételt felhasználva úgy kaphatunk, hogy ha sok független, egyenletes eloszlású számot összegzünk. A számítási sebesség szempontjából azonban kedvezőbb a következő algoritmus:

1. Legyen $u = r_j / M$, $q = (8/e)^{1/2} \cdot (r_{j+1} - 0.5) / u$, $v = q^2$.
2. Ha $v > -4 \cdot \log(u)$ akkor vissza az 1. Pontra, egyébként a keresett szám q .

A fenti algoritmus az (3.4) ábrán látható.



3.4 ábra

Gauss-eloszlású véletlenszám generáló algoritmus

3.1.2. 1/f zaj előállítási módszerek

Az 1/f zaj amplitúdó csonkolásának számítógépes modellezése során az első lépés, a Gauss-eloszlású 1/f zaj generálása. Erre a feladatra számos módszer létezik, tekintsünk át most néhányat.

3.1.2.1. *Független Lorentzi zajok összegzése*

Mivel az irodalomban az $1/f$ zajt általában, mint független Lorentzi típusú zajok szuperpozíciójaként értelmezik [15] ezért kézenfekvőnek tűnik a megoldás, hogy erre alapozva alkossunk $1/f$ zajt generáló algoritmust. Egy ilyen példát már megemlítettünk a 2.5.4 fejezetben, ahol egy sávhatárolt $1/f$ zaj, független Poisson folyamatok összegzésével való előállításának lehetőségét írtuk le. Előnye ennek az eljárásnak, hogy a zaj generálás során elegendő csak egyenletes eloszlású véletlen számokat generálni, hisz a sok független Poisson folyamat összegzéseként a centrális határeloszlási tétel értelmében eleve Gauss-eloszlású $1/f$ zajt kapunk.

3.1.2.2. *Fehérzaj teljesítménysűrűség-spektrumának átskálázása*

Egy másik lehetőség a Wiener-Hincsin összefüggésekből adódik. Mint ismeretes egy zaj teljesítménysűrűség-spektruma kiszámítható az autokorreláció függvényének ismerete nélkül is a következő módon:

$$S_x(f) = F_x(f) \cdot F_x^*(f), \quad 3.3$$

ahol az F_x^* a jel F_x amplitúdó-spektrumának (2.30) komplex konjugáltját jelöli. Mivel tudjuk, hogy a fehér zaj teljesítménysűrűség-spektruma konstans:

$$S_x(f) = F_x(f) \cdot F_x^*(f) = konst., \quad 3.4$$

ezért ha ennek a zajnak az amplitúdó-spektrumát megszorozzuk $1/\sqrt{f}$ -fel akkor $1/f$ zajt kapunk:

$$S_x(f) = \frac{F_x(f)}{\sqrt{f}} \cdot \frac{F_x^*(f)}{\sqrt{f}} = \frac{F_x(f) \cdot F_x^*(f)}{f} = \frac{\text{konst.}}{f}. \quad 3.5$$

A fentiek alapján tehát egy lehetséges diszkrét 1/f zajgenerátor algoritmus a következő:

1. Állítsunk elő egy x_0, x_2, \dots, x_{N-1} , Gauss eloszlású véletlenszám sorozatot, ahol N egész szám a kettőnek egész számú hatványa. Az így kapott véletlenszám sorozat egy Gauss eloszlású fehér zaj diszkrét reprezentációjának tekinthető.
2. Számítsuk ki az így kapott fehér zaj diszkrét Fourier-transzformáltját a gyors Fourier-transzformáció (FFT) segítségével. Így az F_0, F_2, \dots, F_{N-1} komplex számsorozathoz jutunk.
3. Az F_i komplex számokat szorozzuk meg $f^{1/2}$ -nel, illetve a jelen esetben $i^{-1/2}$ -nel, azaz végezzük el a következő műveletet:

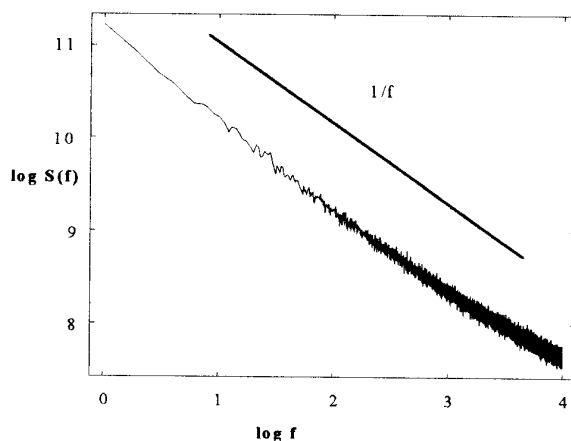
$$F_i = \frac{F_i}{\sqrt{i}}, \quad F_{N-i} = \frac{F_{N-i}}{\sqrt{i}}, \quad \text{ahol } i = 1..N/2. \quad 3.6$$

4. Az így kapott F_0, F_2, \dots, F_{N-1} komplex számsorozaton végezzük el az inverz FFT-t, ezáltal megkapjuk a kívánt Gauss-eloszlású 1/f teljesítménysűrűség-spektrumú zaj diszkrét reprezentációját.

Az itt leírt 1/f zaj generáló algoritmus C nyelvű kódját a függelékben láthatjuk. Előnye ennek az algoritmusnak, hogy nem csak 1/f de bármely spektrumú zajt generálhatunk a megfelelő szorzó alkalmazásával. A (2.4, 2.5) ábrán egy így generált 1/f spektrumú zaj alakját illetve teljesítménysűrűség-spektrumát láthatjuk. A számítógépes szimuláció során az 1/f zaj előállítására ezt az algoritmust alkalmaztuk.

3.1.3. Az amplitúdó csonkolása

Mint azt a fejezet bevezetőjében írtuk, az $1/f$ zaj teljesítménysűrűség-spektruma a (3.1) képletekkel leírt transzformációra invariánsnak mutatkozik. További szimulációkat végezve azt is tapasztaltuk, hogy az $1/f$ zajnak ez a különös tulajdonsága még az amplitúdó aszimmetrikus csonkolása esetén is megmarad (3.5 ábra).



3.5 ábra

Az eredő zaj spektruma az $1/f$ zaj aszimmetrikus csonkolása esetén.

Az aszimmetrikus amplitúdó csonkoláson azt értjük, hogy ha egy Gauss eloszlású $1/f$ zaj amplitúdójának várható értéke a , és szórása σ akkor az (3.1) képletekkel megadott transzformációban:

$$\begin{aligned}x_{\max} &= a + b \cdot \sigma \\x_{\min} &= a - c \cdot \sigma,\end{aligned}\tag{3.7}$$

ahol b és c nem egyenlő, tetszőleges pozitív valós számok (bár a három szigma tétel miatt nyilván nem sok értelme van azokat 3-nál nagyobbra választani). Tehát a szimmetria alatt itt azt értjük, hogy a csonkolási

helyek szimmetrikusak a várható értékre. Vegyük azonban észre, hogy sem, a szimmetrikus sem az aszimmetrikus esetben nem engedjük meg, hogy x_{min} és x_{max} értéke egyszerre legyen nagyobb vagy kisebb a várható értéknél, vagyis csak a :

$$x_{min} < a < x_{max} \quad 3.8$$

eset a megengedett.

Mivel az 1/f zajnak ez az invarianciája az amplitúdó csomkolásra tetszőleges keskeny sáv ($x_{min} \approx a$, és $x_{max} \approx a$), sőt $x_{min}=a$ és tetszőleges $x_{max} > x_{min}$ esetén is megmaradt, ezért felmerült, hogy esetleg az 1/f zaj esetében a nullszintmetszés (0 várható értékű Gauss-eloszlást feltételezve az amplitúdóra) felelős a spektrumért.

Hogy a fenti problémára választ találhassunk a szakdolgozat készítésekor egy speciális amplitúdó transzformációt vizsgáltunk, amely a következő volt:

$$y(t) = \begin{cases} +1, & \text{ha } x(t) \geq a + b \cdot \sigma \\ -1, & \text{ha } x(t) < a + b \cdot \sigma, \end{cases} \quad 3.9$$

ahol $b (\leq 3)$ tetszőleges pozitív valós szám, a és σ pedig továbbra is a várható érték és a szórás.

3.1.3.1. A várható érték és a szórás meghatározása

Az előbbieken leírt transzformációhoz a modellezés során meg kellett határozni a várható értéket és a szórást. Ezt minden egyes mintához meghatároztuk a következő módon. Mivel a minták hossza rendkívül nagy volt (2^{18} , néha 2^{20}) ezért jó közelítéssel vehettük az

amplitúdók átlagát a várható értékkel megegyezőnek (2.1.2 fejezet), vagyis:

$$a \approx x_{\text{átlag}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad 3.10$$

ahol a a várható érték, x_i a generált diszkrét 1/f zaj i -edik eleme, n pedig a mintahossz. Hasonlóan meghatározható a szórás is a következő módon:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{átlag}})^2}{n}}. \quad 3.11$$

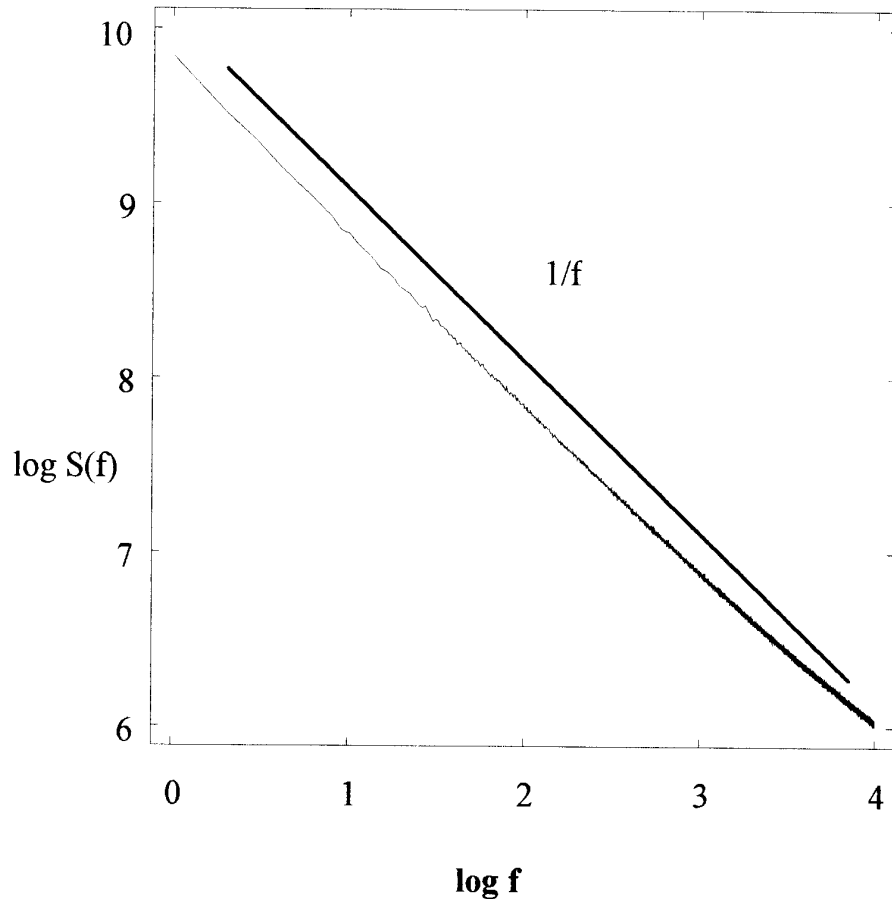
Mindkét eljárás és az előbb definiált amplitúdó transzformáció C nyelvű kódja megtalálható a függelékben.

3.2. A szintmetszés szimmetrikus esetre

Az első esetben azt vizsgáltuk, hogy hogyan változik meg az 1/f zaj tejesítménysűrűség-spektruma ha elvégezzük rajta a 3.1.3 fejezetben leírt amplitúdó transzformációt a $b=0$ estre, vagyis a metszendő szint megegyezik a zaj amplitúdójának várható értékével. A címben szereplő szimmetrikus jelző itt arra utal, hogy ekkor a transzformáció úgy tekinthető, mint a 3.1.3 fejezetben leírt szimmetrikus csonkolás határesetre, vagyis amikor addig csökkentjük a két szint közti távolságot, hogy végül $x_{\min} \approx x_{\max}$ lesz. A szimulációt 2^{20} -on hosszú mintákra végeztük el. A csonkolás után minden egyes mintának FFT-vel meghatároztuk a tejesítménysűrűség-spektrumát, majd ezt egy tömbben elhelyeztük. Az eredő spektrumot 1000 ilyen minta tejesítménysűrűség-spektrumának

átlagolásával nyertük. Az (3.6) ábrán egy ilyen szimuláció során nyert teljesítménysűrűség-spektrum látható.

A számítógépes modellezés során azt tapasztalhatjuk, hogy az így transzformált $1/f$ zaj spektruma is $1/f$ lesz.



3.7 ábra

A $1/f$ zajból szimmetrikus szintmetszéssel kapott zaj spektruma

Az itt tapasztalt eredményeket elméleti úton is alátámaszthatjuk [20]. Tekintsünk egy $x(t)$ 0 várható értékű $1/f^\alpha$ spektrumú zajt, ahol $x(t)$ -n a Gaussi zaj időfüggő amplitúdóját értjük. Ekkor a (3.9) összefüggésekkel megadott transzformáció a következő alakú:

$$y(t) = \begin{cases} +1, & \text{ha } x(t) \geq 0 \\ -1, & \text{ha } x(t) < 0, \end{cases} \quad 3.12$$

ahol $y(t)$ a csonkolt zaj amplitúdója. Először adjuk meg a bemenő és a kimenő jel korrelációs függvényeinek a kapcsolatát. Ehhez a kimenő jel korrelációs függvénye:

$$\begin{aligned} R_y(t) &= 1 \cdot P(y(0)y(t)=1) + (-1)P(y(0)y(t)=-1) \\ &= P(x(0)x(t) > 0) - P(x(0)x(t) < 0) \\ &= 2 \cdot P(x(0)x(t) > 0) - 1, \end{aligned} \quad 3.13$$

ahol $P(\cdot)$ annak a valószínűsége amit az argumentuma meghatároz.

A $P(x(0)x(t) > 0)$ eleve adott, ha stacionárius Gaussi folyamatot feltételezünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} P(x(t_1), x(t_2)) &= P(x(0), x(t_2 - t_1)) \\ &= \frac{1}{A_0} \exp\left[-(x^2 - 2cxy + y^2)/B\right] \\ &\equiv f(x, y), \end{aligned} \quad 3.14$$

ahol $x \equiv x(0)$, $y \equiv x(t_1 - t_2)$, $c \equiv R_x(t_1 - t_2)$, $A_0 \equiv 2\pi R_x(0)\sqrt{1 - c^2}$, $B \equiv 2R_x(0)(1 - c^2)$, $R_x(t)$ pedig az $x(t)$ korrelációs függvénye. A (3.14) a $P(xy > 0)$ valószínűség a következő:

$$\begin{aligned}
P(xy > 0) &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy f(x, y) + \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^0 dy f(x, y) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin[R_x(t)].
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

Az (3.13)-ból pedig:

$$R_y(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin[R_x(t)]. \tag{3.16}$$

A korrelációs függvények közötti (3.16) kapcsolat pedig a Wiener-Hincsiné tétel felhasználásával megadja a teljesítménysűrűség-spektrumok közti kapcsolatot:

$$S_{ii}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_i(t) \cos(\omega t) dt \tag{3.17}$$

$$= -2 \int_0^{\infty} R'_i(t) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt, \text{ ahol } I = x, y \tag{3.18}$$

mivel stacionárius folyamatot tételeztünk fel. Tehát arra az eredményre jutottunk, hogy a transzformáció során az $S_x(\omega) \sim 1/\omega^\alpha$, $S_y(\omega) \sim 1/\omega^\beta$ -ba megy át.

Vizsgáljuk most meg az α és a β kapcsolatát $\alpha \approx 1$ esetre! Feltesszük, hogy:

$$R_x(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 1 \\ \frac{1}{1 + \log(t)} & \text{ha } t > 1 \end{cases} \quad 3.19$$

Ekkor a (3.17) képletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} S_x &= 2 \int_0^1 1 \cdot \cos(\omega t) dt + 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + \log(t)} \cos(t) dt \\ &= 2 \frac{1}{\omega} \int_{\omega}^{\infty} \frac{\sin(x)}{\left(1 + \log \frac{x}{\omega}\right)^2} dx \end{aligned} \quad 3.20$$

Ha az $1 + \log(x/\omega)$ -át $\omega \ll 1$ esetén $\log(1/\omega)$ -val helyettesítjük az integrandusban akkor:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &\sim 2 \frac{1}{\omega \left(\log \frac{1}{\omega}\right)^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \omega \ll 1 \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \frac{1}{\omega \left(\log \frac{1}{\omega}\right)^2}. \end{aligned} \quad 3.21$$

A kimenő jel teljesítménysűrűség-spektrumát hasonlóan megkaphatjuk, ha (3.19)-et behelyettesítjük (3.18)-ba. Ekkor az alacsony frekvenciás tartományban:

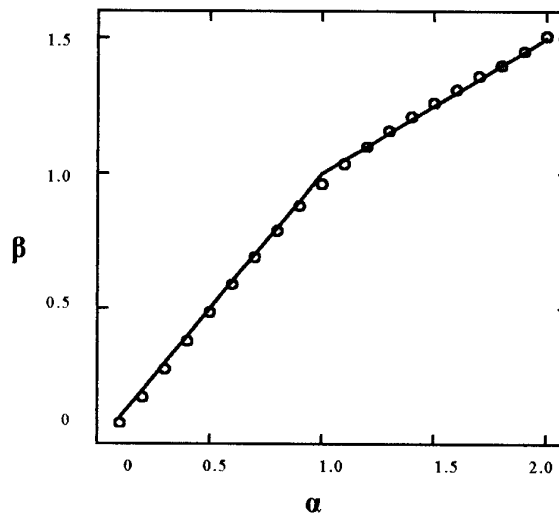
$$S_y(\omega) \sim 2 \frac{1}{\omega \left(\log \frac{1}{\omega} \right)^2} \quad \omega \ll 1. \quad 3.22$$

Tehát arra az eredményre jutottunk, hogy az alacsony frekvenciás tartományban $\beta = \alpha$.

Megjegyezzük, hogy a fentihez hasonló módon be lehet látni, hogy a szimmetrikus szintmetszés esetén [20]:

$$\beta = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{\alpha + 1}{2}, & \text{ha } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad 3.23$$

A fenti eredmény numerikus szimulációval is megerősíthető, ez látható a (3.8) ábrán.

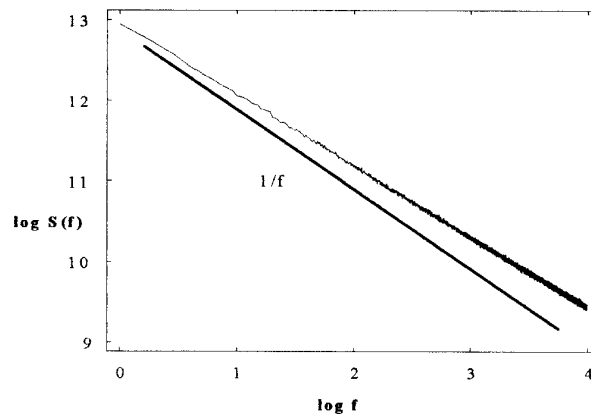


3.8 ábra

Az eredő $1/f^\beta$ spektrumú zaj β kitevőjének függése az $1/f^\alpha$ spektrumú eredeti zaj α kitevőjétől a szimmetrikus szintmetszés során.

3.3. A szintmetszés aszimmetrikus esetre

Mint azt már az előzőekben is kihangsúlyoztuk az eddigi amplitúdó transzformációk mindegyikére az volt a jellemző, hogy a csonkoltan amplitúdó tartomány magába foglalta a vizsgált zaj amplitúdójának várható értékét. Felvetődik azonban a kérdés, hogy mi a helyzet ha ez nincs így? Elvégezve a (3.1) képletekkel definiált transzformációt különböző $(b, c) > a$ számpárokra azt tapasztaltuk, hogy az $1/f$ zaj spektruma már nem marad invariáns erre az amplitúdó transzformációra, hanem erősen függ a b, c számpárok magválasztásától (3.9 ábra).

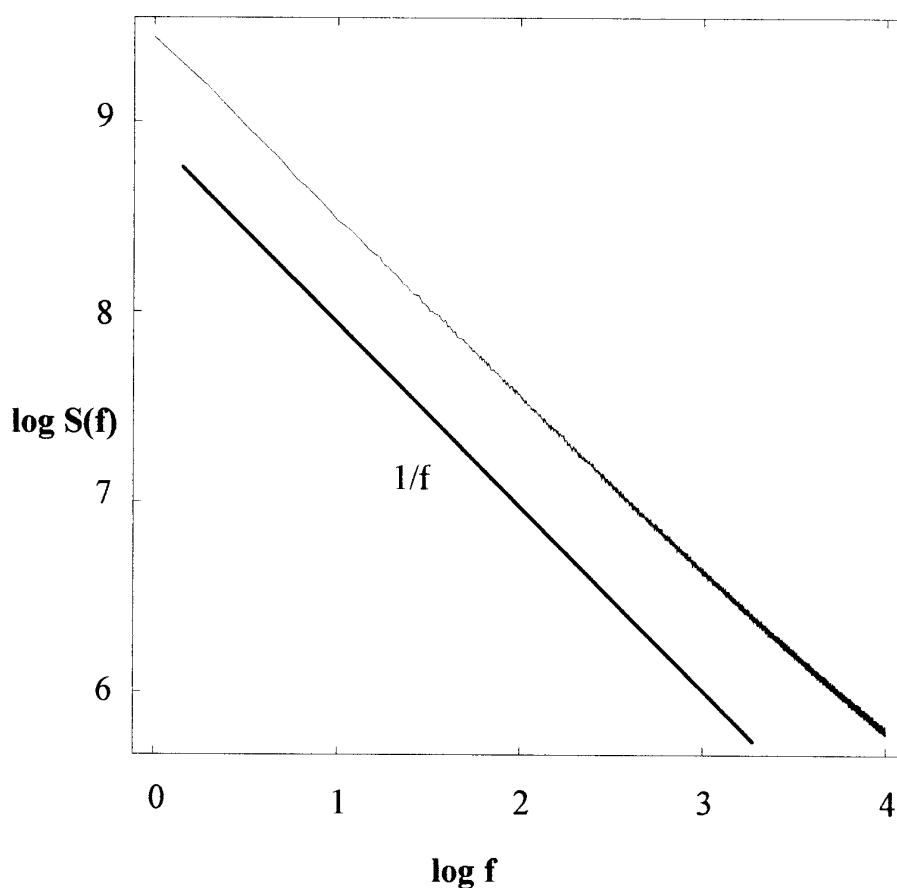


3.9 ábra

Az $b=1, c=2$ helyen csonkolt $1/f$ zaj spektruma

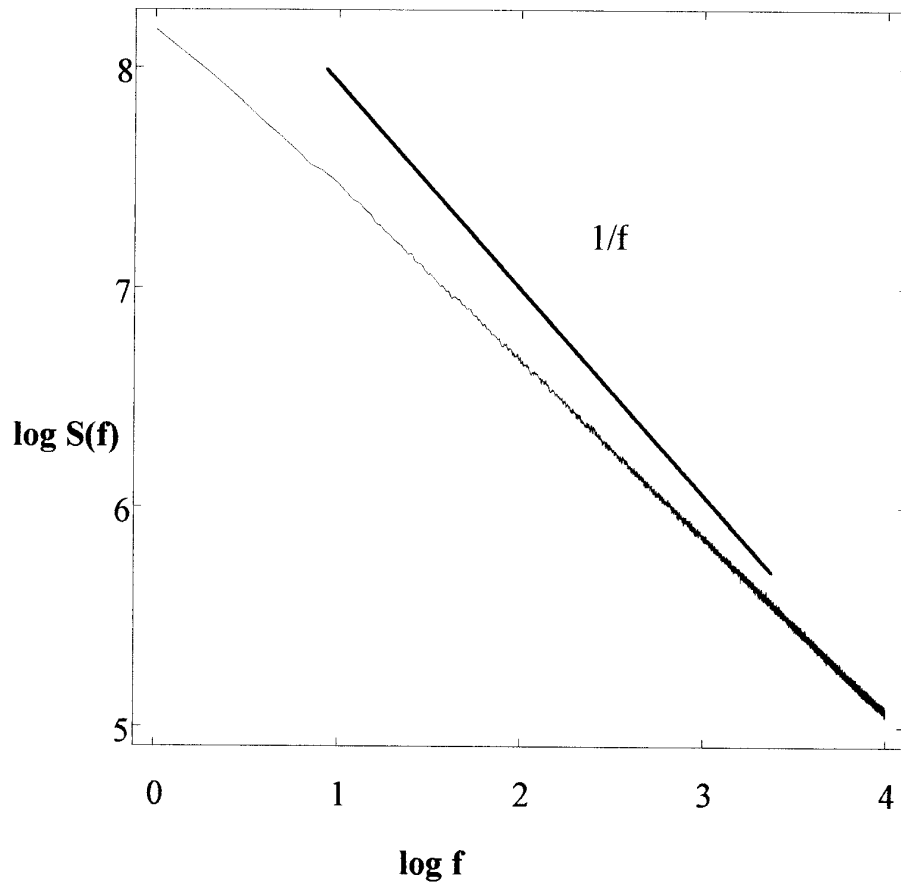
Úgy tűnik tehát, hogy az $1/f$ zaj tejesítménysűrűség-spektrumában fontos szerepet kap az amplitúdó várható értékének szintje. Hogy megvizsgáljuk mennyire függ az $1/f$ zaj spektrumának megváltozása a csonkolás során az amplitúdó várható értékének szintjétől való eltávolodástól, elvégeztük a 3.2 fejezetben leírt szimulációt aszimmetrikus esetre is. Az aszimmetria alatt itt azt értjük, hogy a metszési szintet nem a várható értékre hanem a fölé vagy alá állítottuk be, vagyis az (3.9)-ben a b -re: $0 < b < 3$. Az eredő

spektrumot most is 1000 minta átlagolásával nyertük, és a mintahossz itt is 2^{20} -on volt. A nagy mintahossz itt azért is volt rendkívül fontos, mivel a háromszigma szabály értelmében például a 3σ szinten felvett szintmetszés esetén már csak nagyon kevés számú billenés van (2^{20} -on mintahossz esetén 1000 körüli). Ez is okozhatta a spektrumnak, a $b > 2$ estre tapasztalt torzulását. Az így végzett szimulációk eredményeit láthatjuk az alábbi ábrákon:



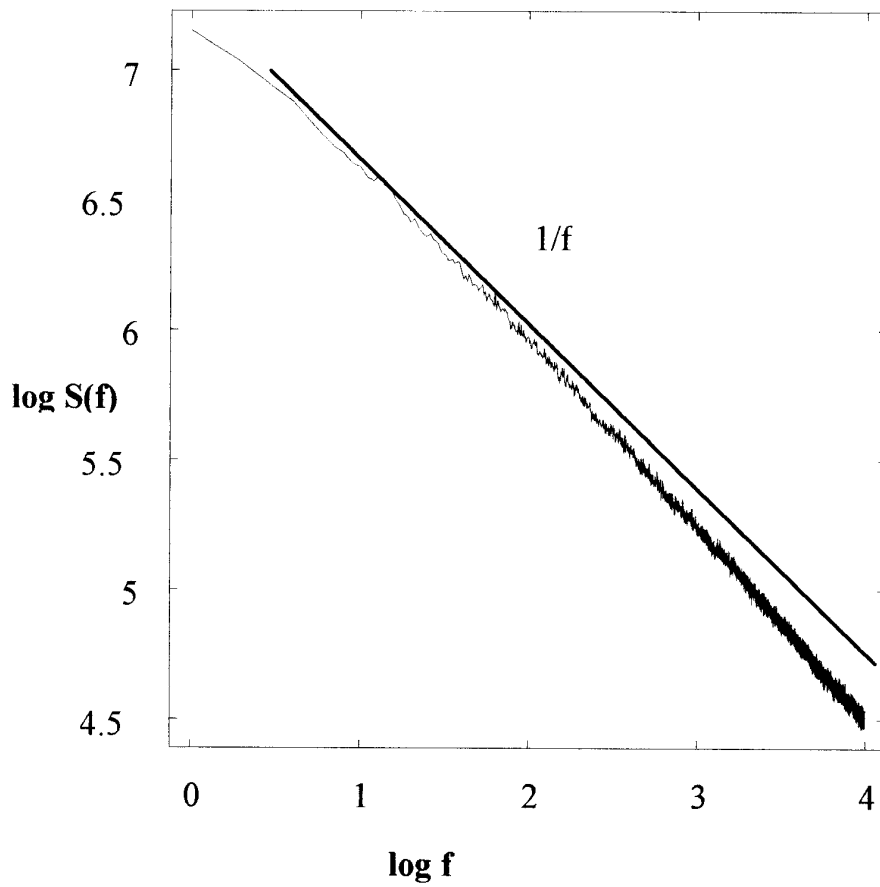
3.10 ábra

Az $1/f$ zaj amplitúdó transzformációja során nyert zaj spektruma a metszési szint 1σ -ba való helyezésekor



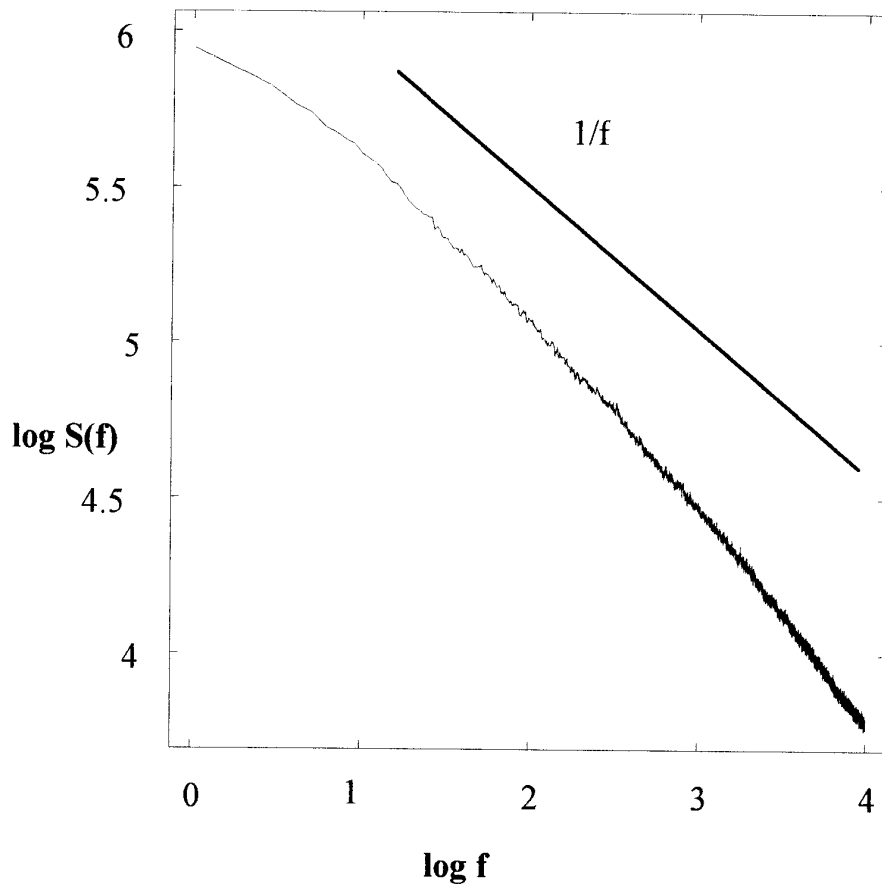
3.11

Az $1/f$ zaj amplitúdó transzformációja során nyert zaj spektruma a metszési szint 2σ -ba való helyezésekor



3.12 ábra

*Az $1/f$ zaj amplitúdó transzformációja során nyert zaj spektruma a
metszési szint 2.5σ -ba való helyezésekor*

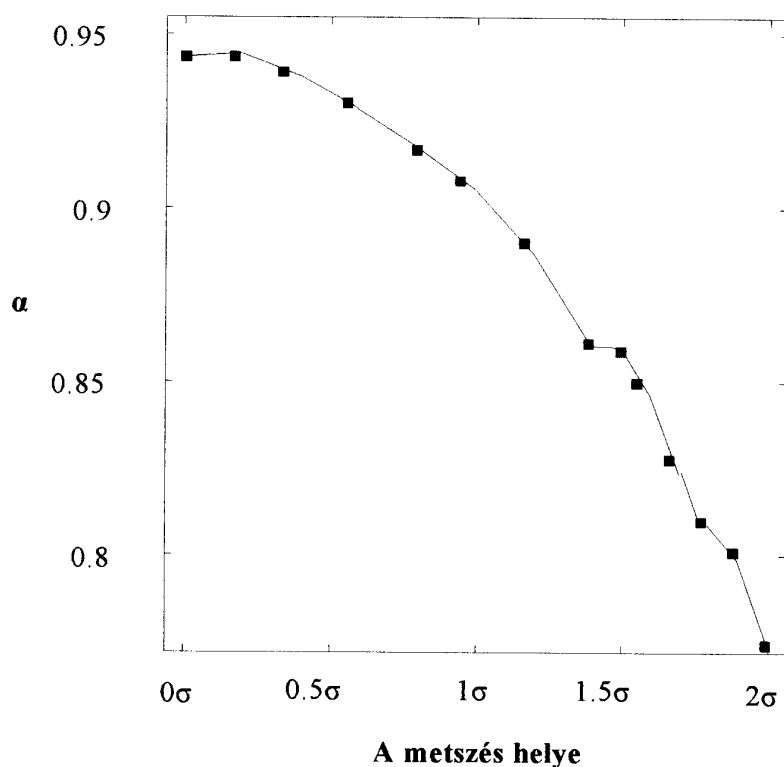


2.13 ábra

Az $1/f$ zaj amplitúdó transzformációja során nyert zaj spektruma a metszési szint 3σ -ba való helyezésekor

Azt tapasztaltuk, hogy a spektrum még ezzel a transzformációval is hatványfüggvény marad, vagyis $1/f^\alpha$ alakú. Az α azonban csak körülbelül 1σ -ig marad közelítőleg 1. Attól függően, hogy mennyire távolodunk el a metszési szinttel a középértéktől, a spektrum annál jobban eltér az $1/f$ értéktől. Azt azonban, hogy pontosan mi történik a 2σ - 3σ sávban (például miért kanyarodik lefelé a spektrum a nagy frekvenciás tartományban), egy pontosabb méréssel, illetve elméleti úton is meg kellene vizsgálni.

Hogy pontosabb képet kapjunk arról, hogy a spektrum változása hogyan függ a metszési szint középértéktől való távolságától, egy másik szimuláció-sorozatot is elvégeztünk. Itt 2^{18} -on hosszú mintákat vizsgáltunk a $(0\sigma, 3\sigma)$ tartományban 0.2σ lépésként. Az eredő spektrumot itt is 1000 minta átlagából határoztuk meg. Ekkor is azt tapasztaltuk, hogy a spektrum megmarad $1/f^\alpha$ alakú, az α pedig a b növekedésével egyre jobban csökken. Az (3.14) ábra az α függését mutatja a szintmetszési hely megválasztásától.



3.14 ábra

Az $1/f$ zaj amplitúdó transzformációja során nyert zaj, α spektrumkitevőjének függése a metszési szint helyének megválasztásától.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

A szakdolgozat egy a természetben széles körben előforduló zajtípust, az $1/f$ zajt vizsgáltuk. Bár az $1/f$ zaj több évtizedes vizsgálata rengeteg eredményt hozott, de még mindig számos megoldatlan problémával találkozunk, ezért szükség van a további kutatásokra, új modellek keresésére.

A szakdolgozat készítésekor egy ilyen, nemrégiben felfedezett tulajdonság, az $1/f$ zaj spektrumának, a zaj amplitúdó-csonkolására mutatott invarianciájának további vizsgálatát tűztük ki célul. Egy speciális, nemlineáris amplitúdó transzformációt hajtottunk végre az $1/f$ zajon, amely során egy amplitúdó értéket, mint metszési szintet kijelölve a zaj amplitúdóértékeit úgy transzformáltuk, hogy ha az eredeti amplitúdó érték a kijelölt szinten vagy fölötte van akkor legyen az értéke egy, különben pedig mínusz egy. Az így nyert kétállapotú zaj spektrumát hasonlítottuk össze az eredeti zaj spektrumával, illetve vizsgáltuk annak függését a metszési szint megválasztásától. A vizsgálatunkat számítógépes modellezéssel végeztük szimmetrikus, illetve aszimmetrikus esetre.

Azt tapasztaltuk, hogy ha a metszési szintet az amplitúdó várható értékének szintjére helyezzük, akkor a transzformáció során nyert zaj is $1/f$ spektrumú marad. Ezt az eredményt elméleti úton is alátámasztottuk, illetve megjegyeztük, hogy hasonlóan viselkednek más $1/f^a$ spektrumú zajok $0 < a \leq 1$ esetben.

Az aszimmetrikus esetben a kapott zaj spektruma továbbra is hatványfüggvény marad, de az így nyert spektrum kitevője a szintmetszés helyétől jelentősen függ. Ez a tapasztalat arra enged következtetni, hogy az $1/f$ zaj esetén különösen fontos a középérték metszései statisztikája. Ezzel az $1/f$ zaj egy újabb eddig még nem ismert tulajdonságára derült fény, amely közelebb vihet az $1/f$ zaj jobb megértéséhez, illetve újabb modellek alkotására ad lehetőséget.

A további kutatás egyik irányát az aszimmetrikus szintmetszés eredményeinek elméleti modelljének megalkotásában jelölhetjük ki. Emellett a szakdolgozatban tárgyalt téma felveti más olyan nemlineáris amplitúdó transzformációk esetleges létezését, melyekre az $1/f$ zaj spektruma szintén invariáns.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] R.F. Voss, in Proc.33rd Annu.Symp.Frequency Contr., Atlantic City, NJ, (1979) 40
- [2] F.N. Hooge, Physica, vol 83B, (1976) 14
- [3] J.R. Clem, Phys.Rev. B1 (1970) 2140
- [4] R.J. van den Berg and A. de Vos, Phys. Lett. A92 (1982) 203
- [5] A.A. Verveen and H.E. Dirkson, Proc IEEE 56 (1968) 906
- [6] O. Toussoun, Memoires de l'Institut d'Egypt 8-10, Cairo (1925)
- [7] R.F. Voss and J. Clarke, J.Accoust Soc.Amer., 63 no.1 (1978) 258
- [8] B.B. Mandelbrot and J.W. Van Ness, SIAM Rev.,10 no.4 (1968) 422
- [9] Prékopa A. Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Kiadó, Budapest, 1980
- [10] Dr. Vincze Endre: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, 1972
- [11] Rényi A.:Valószínűségszámítás
- [12] Jelek és rendszerek mérés technikája, szerk. Schnell, Műszaki Kiadó Budapest, 1985
- [13] Ambrózy A.:Elektronikus zajok, Műszaki Kiadó, Budapest, 1972
- [14] C. Heiden, Phys.Rev. 188 (1969) 319
- [15] A.L. McWorther, R.L.E. 295 and Lincoln Lab Tech Rep. 80, M.I.T., 1955
- [16] D.E. Knuth: A számítógépprogramozás művészete, Műszaki Kiadó, Budapest, 1987
- [17] Thomas H. Cormen, Charles E.Leiserson, Ronald E. Rivest: Algoritmusok, Műszaki Kiadó, 1997

- [18] L. B. Kiss, Z. Gingl, Zs. Marton, J. Kertesz, F. Moss, G. Schemera and A. Bulsara, 1993, J. Stat. Phys. 70, 451.
- [19] Z. Gingl and L. B. Kiss, In: Proc. First Int. Conf. on Unsolved Problems of Noise (1996) Ed. Ch. R. Doering, L. B. Kiss and M. F. Schlesinger, (World Scientific) 337.
- [20] Amplitude truncation of $1/f^k$ noise, Kézirat.
- [21] U. Tietze, Ch. Schenk: Analóg és digitális áramkörök, Műszaki Könyvkiadó, 1990
- [22] III. éves fizikai laboratóriumi gyakorlatok, Szerkesztette: Michajlovits Lehel, JATEPress, 1995
- [23] Brian W. Kernighan, Dennis M. Ritchie: A C programozási nyelv, Műszaki Könyvkiadó, 1997
- [24] Samuel Karlin, Howard M. Taylor: Sztochasztikus folyamatok, Gondolat, 1985
- [25] Nagy István: Az $1/f$ zaj markovi tulajdonságának vizsgálata, Diplomamunka, JATE, 1992

FÜGGELÉK

1. A normális eloszlású $1/f^\alpha$ zaj előállítására szolgáló alábbi C nyelvű programban az `rndg()` a Gauss-eloszlású véletlenszámokat adja, az `fft(...)` a gyors Fourier-transzformációt végzi el. Az `n` az adatok száma (kettő egész számú hatványa), `alfa` a kívánt hatványkitevő, az `*x` pedig az adatokat tartalmazó tömb címe.

```
void NoiseFunc(double alfa, int n, complex *x)
{
    int i;
    double c,a;

    a=alfa/2.0;
    for(i=0; i<n; i++)
    {
        x[i].re = rndg();
        x[i].im = 0.0;
    }
    fft(DIRECT, (int)ROUND(log(n)/log(2)), x);
    for(i=1; i<n/2; i++)
    {
        c=n/pow(i, a);
        x[i].re*=c;
        x[i].im*=c;
        x[n-i].re*=c;
```

```

    x[n-i].im*=c;
}
i=n/2;
c=n/pow(i, a);
x[i].re*=c;
x[i].im*=c;
fft(INVERSE, (int)ROUND(log(n)/log(2)), x);
return;
}

```

2. A szintmetszést végző alábbi C nyelvű programban az n az adatok hossza, a a szintmetszés helyét határozza meg, $*x$ pedig a transzformálandó zajt tároló complex tömb címe. A függvény visszatérési értéke a szintmetszések száma. Ez a függvény végzi a bemenő adatsor várható értékének és a szórásának a kiszámolását is

```

int TruncateFunc(int n, double a, complex *x)
{
    int i, ugras;
    double atlag, sigma;

    atlag=0; sigma=0; ugras=0;
    for(i=0; i<n; i++) atlag=atlag+x[i].re;
    atlag = atlag/i;
    for(i=0; i<n; i++) sigma=sigma+SQR(x[i].re-atlag);
    sigma = sigma/i;
    sigma = sqrt(sigma);
}

```

```
a = a * sigma;  
a = atlag + a;  
  
for(i=0; i<n; i++)  
{  
  if(x[i].re>=a) {x[i].re=1; ugras++;}  
  else if(x[i].re<a) x[i].re=-1;  
}  
return ugras;  
}
```

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ez a szakdolgozat a József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karának Kísérleti Fizikai Tanszékén készült.

Köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek, Dr. Gingl Zoltánnak a szakdolgozat témájának kijelöléséért, és az elkészítése során felmerült problémák megoldásában nyújtott segítségéért,

a Kísérleti Fizikai Tanszék vezetésének, hogy lehetővé tette számomra munkámnak a tanszéken való elvégzését.