

# **Mintavételezéses mérési eljárások vizsgálata**

(szakdolgozat)

Készítette: Barna Róbert  
V. év fizika-tanár szak

Konzulens: Dr. Gingl Zoltán

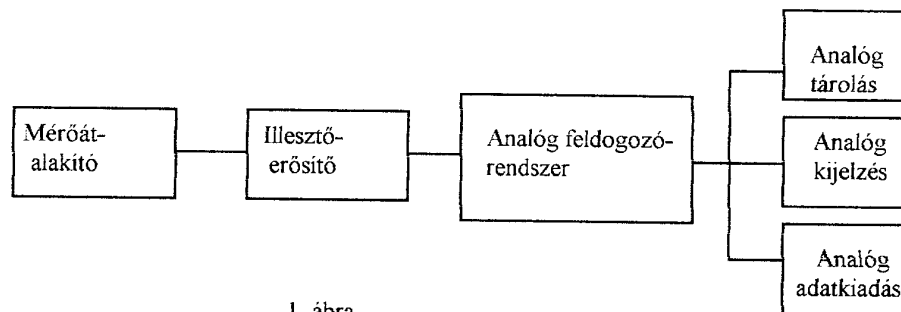
József Attila Tudományegyetem  
Szeged, 1998

## Bevezetés

A fizika tudomány tárgya a természetben – környezetünkben – lejátszódó folyamatok leírása, megmagyarázása. Szinte minden ilyen fizikai folyamat tulajdonsága az, hogy valamely fizikai változó függvényeként, az adott értelmezési tartományon belül folytonos jellegű. E tulajdonságuk révén azon folyamatok közé tartoznak, melyeket általában az „analóg” fogalommal jelölnek.

A jelfeldolgozás, jelanalízis területén évtizedeken keresztül az analóg jelek mérésével, elemzésével, feldolgozásával és tárolásával kapcsolatos kutatásoké és alkalmazásoké volt a fő szerep.

Az alábbi ábra egy analóg jelfeldolgozó láncot szemléltet.

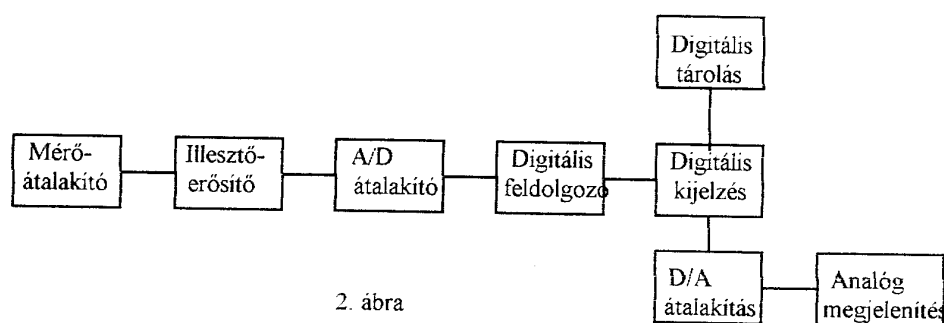


1. ábra

Ez az eljárás igen sok területen, viszonylag egyszerű módon használható, alkalmazását azonban egy sor korlátozás nehezíti. Így például az is, hogy különösen az időben változó analóg jelek dokumentálása, értékelése és analízise nehézkes vagy egész egyszerűen lehetetlen.

A nehézségek áthidalhatók, ha a jeleket diszkrét értékű és diszkrét idejű adatokká alakítják át, majd ezek átvitelét, tárolását és elemzését digitális berendezésekkel végzik el.

Ezt követően a jelet digitális rendszerrel lehet analizálni, tovább feldolgozni, vagy egyszerűen csak tárolni. Ezen túlmenően az eredeti vagy az átalakított, azaz feldolgozott digitális jel analóg jellé is visszaalakítható. Ha az eredetileg analóg jel digitális adatértékekké való átalakítására, ezek átvitelére, elemzésére és további feldolgozására vonatkozó alapvető szabályokat figyelembe vesszük, akkor ezt a jelet hibátlanul, azaz az információ lényeges torzulása vagy vesztesége nélkül lehet meghatározni, analizálni, feldolgozni és analóg jellé visszaalakítani.



A fenti ábrán egy digitális jelfeldolgozó lánc tömbvázlata látható.

Ennek a szakdolgozatnak a célja az olyan digitális mérési és jelfeldolgozási módszerek bemutatása, melyek ma már hétköznapiak számítanak az elektronikában, szem előtt tartva ugyanakkor az eredmények felhasználhatóságát későbbi laboratóriumi gyakorlatokon.

## 1. A mintavételezéses mérés

Ha egy fizikai mennyiség időbeli változására vagyunk kíváncsiak, akkor lassú folyamatok esetén adott időpillanatokban elvégzett méréssel kapjuk meg az időfüggést. Ha a folyamat gyors, akkor olyan eszközökre van szükség, melyek rövid idő alatt sok elemi mérés elvégzésére, és az adatok tárolására képesek.

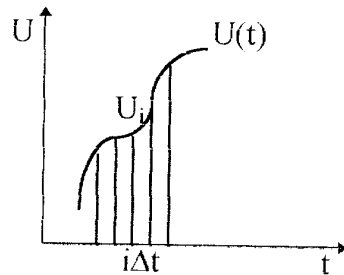
Periodikus folyamatoknál ezt katódsugár oszcilloszkóppal végezhetjük el, míg nem periodikus jelek esetén tároló oszcilloszkópot használhatunk. Ebben a fejezetben az időfüggő jelek mérésének alapelveit tekintjük át.

Ha egy  $U(t)$  feszültség értékét úgy rögzítjük, hogy  $\Delta t$  időközönként megmérjük. Az így kapott, időben diszkrét jelet mintavételezett jelnek nevezzük, és a következő formulával adjuk meg

$$U_M(t) = \Delta t \sum_i U_i \cdot \delta(t - i \cdot \Delta t)$$

ahol  $U_i = U(t_0 + i\Delta t)$ ,  $t_0$  a mérés kezdetének időpontja, a Dirac-függvény.

A mérés során tehát az  $U_i$  feszültségsorozatot kapjuk, amik az  $U(t)$  feszültség  $t_0 + i\Delta t$  időpillanatokban felvett értékeinek felelnek meg.



3. ábra

Mikor reprezentálja  $U_M(t)$  megfelelően az  $U(t)$  feszültséget? Ha  $\Delta t$  elegendően kicsi, akkor az  $U(t)$  jel  $\Delta t$  idő alatt keveset változik, és ekkor  $U_M$  láthatóan jól közelítheti  $U$ -t, de két mérési időpontbeli értékről ekkor is keveset tudunk.

A mintavételi tétel szerint, ha  $U(t)$  Fourier-felbontásában egy  $f_0$  frekvenciánál nagyobb frekvenciákhoz tartozó tagok amplitúdója nulla, akkor a jel információvesztés nélkül reprezentálható  $\Delta t = 1/2f_0$  időközönként vett mintáival. A tétel szerint tehát ebben az esetben az  $U_M(t)$  mintavételezett jel egyértelműen meghatározza az  $U(t)$  függvényt, még azon  $t$  időpontokban is, ahol nem történt mintavételezés. Az  $U(t)$  jelet az alábbi formulával kapjuk

$$U(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U\left(\frac{i}{2f_0}\right) \frac{\sin \pi 2f_0 \left(t - \frac{i}{2f_0}\right)}{\pi 2f_0 \left(t - \frac{i}{2f_0}\right)}$$

A mintavételi tétel ad lehetőséget arra, hogy A/D konverterrel végzett mintavételezéses méréssel határozzuk meg egy jel időfüggését. Ha nem

tudjuk biztosan a mérendő jelben található legnagyobb frekvenciát, akkor egy olyan aluláteresztő szűrőt (antialiasing filter) kell használnunk, ami egy adott  $f_0$ -nál nagyobb frekvenciájú tagokat a jelből kiszűri. Egy további probléma, hogy a szűrő az áteresztő tartományban valamennyire módosítja a jelek fázisát is, tehát egy adott frekvenciájú szinuszos jel a szűrő után valamennyi fáziskéséssel jelenik meg, ráadásul ez a késés függ a frekvenciától is. Természetesen az szükséges, hogy az információvesztés kicsi mértékű legyen a számunkra érdekes mennyiség mérésének szempontjából. Jó példa erre a hangfrekvenciás jelek digitalizálása. Itt egy igen nagy szelektivitású szűrőt használnak a mérés során, kb. 44kHz mintavételi frekvencia mellett. Így csak a 20kHz feletti komponenseket veszítjük el, ami nem probléma, mivel a fül ezeket a frekvenciákat már nem hallja, ezért nem okoz problémát az információvesztés.

Egy másik probléma az, hogy a jel egy időpillanatbeli értékének A/D konverterrel végzett digitalizálása időt vesz igénybe. A konverzió ideje alatt a jelnek nem szabad jelentősen változni, mert ekkor hiba történhet a konverzió során. Ezt a problémát az úgynevezett mintavevő-tartó oldja meg, azáltal, hogy a konverzió befejezéséig tárolja azt az U értéket, ami a konverzió kezdeti időpontjához tartozik.

## 2. Az analóg és digitális jelek leírása

A DIN 44 300 meghatározása szerint a jel fogalma hírek vagy adatok fizikai ábrázolását jelenti. Ezek szerint egy analóg jelet az jellemez, hogy a jelparaméter pl. olyan információt ábrázol, amely folytonos függvényekből áll.

Hacsak kifejezetten más megállapodás nincs, akkor a híradástechnikában abból szokás kiindulni, hogy a jelparaméter valamilyen, a  $t$  időtől függő folyamat amplitúdója.

Az ilyen folyamatot leíró függvényeket időfüggvényeknek szokás nevezni, és jelölésükre olyan függvényjelet alkalmaznak, amelynek argumentuma független változóként az időt tartalmazza, pl.  $s(t)$ ,  $f(t)$ ,  $a(t)$  stb.

### 2.1 Folytonos értéktartományú és időben folytonos jelek:

A mind az amplitúdójuk, mind az időfüggvényében folytonosan változó jeleket analóg jeleknek vagy folytonos értékű és folytonos idejű jeleknek nevezzük.

## **2.2 Diszkrét értékű, időben folytonos jelek:**

Az amplitúdóértékek akkor változnak ugrásszerűen, ha analóg jelet amplitúdó szerint kvantálnak. Ekkor tehát már nem fordulhat elő végtelen sok függvényérték, hanem csak a tartományok, ill. amplitúdólépcsők számának megfelelő, véges számú érték lehetséges.

## **2.3 Folytonos értékű, diszkrét idejű jelek:**

Az előbb említett esettel ellentétben, időben szakaszos jel olyan rendszerben keletkezik, amely időben folytonosan változó jelfüggvényből diszkrét időpontokban mintát vesz. Az általánosan használt, analóg jelek digitális adatértékekké való átalakítására szolgáló mintavevő rendszer kimenetén folytonos értékű és diszkrét idejű jel található.

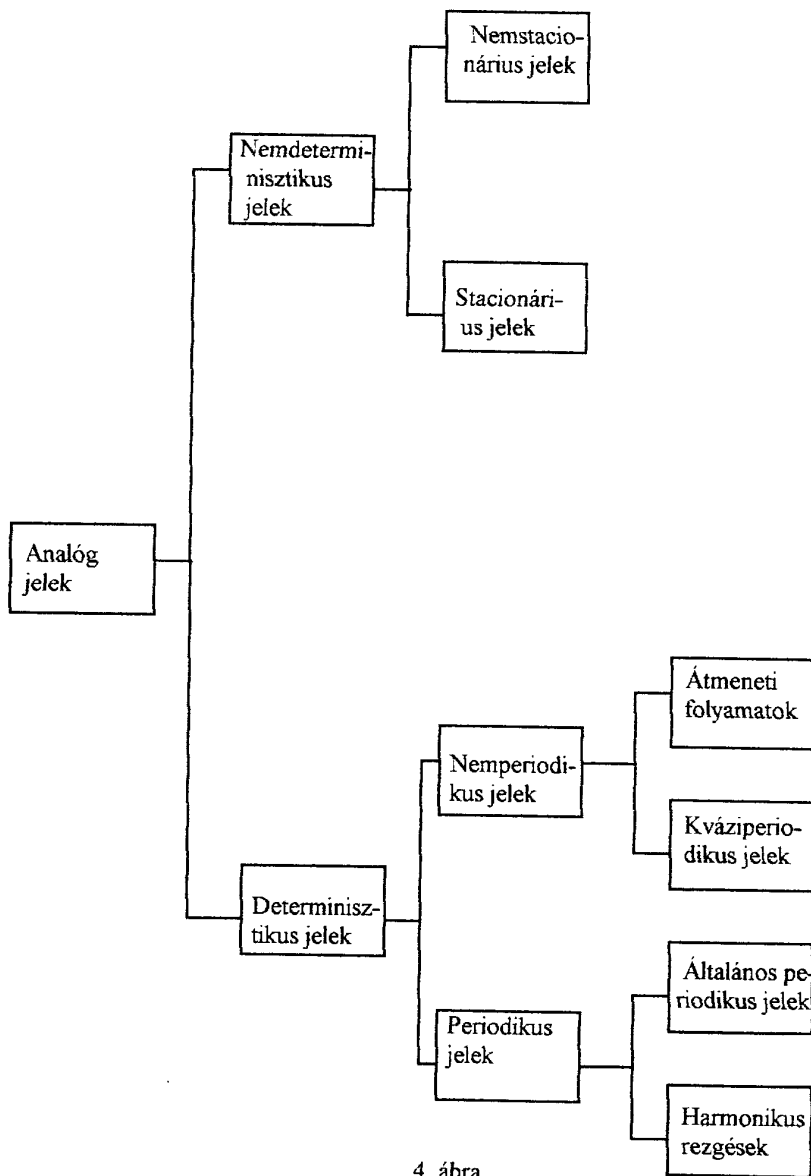
## **2.4 Diszkrét értékű és időben diszkrét jelek:**

Ha analóg jelből időközönként mintát vesznek, és a jel amplitúdóját is kvantálják, akkor diszkrét értékű és diszkrét idejű jelről van szó. Ilyen jelek az analóg-digitális átalakító kimenetén észlelhetők, amely az analóg jeleket diszkrét adatok sorává alakítja át. A diszkrét értékű és diszkrét idejű jeleket digitális jeleknek nevezik. A jelek ekkor általában a további feldolgozásra



alkalmas, megfelelően kódolt alakban, bináris jelekként (azaz bináris számértékeként) állnak rendelkezésre.

### 3. Analóg jelek osztályozása



4. ábra

## **4. Jeltorzulások a mintavétel következtében**

A jel mintavételezési folyamata során szükségszerű sok hibaforrás a vett mintajeleket torzítja. E torzulásoknak különböző okai lehetnek, melyeket a következőkben részletesebben tárgyalunk. Ezeket a nemkívánatos jeltorzulásokat megfelelő intézkedésekkel a lehető legkisebb értéken lehet ugyan tartani, teljesen elkerülni azonban nem lehet, mivel részben maga a folyamat tartalmazza a torzulások okait. Ezért szükség van arra, hogy az analízis pontosságára gyakorolt befolyásukat lehetőség szerint előzetesen meg lehessen határozni vagy legalábbis valamennyire becsülni lehessen.

### **4.1 Aliasing zaj:**

A zavarok egyik legkellemetlenebb és gyakran csak nehezen elkerülhető oka a mintavételi tétel megsértése. Ekkor ugyanis az angolszász irodalomban aliasing néven ismert jelenség lép fel. E jelenség okai a periodikusan ismétlődő spektrum időbeni mintavételezése során fellépő átlapolások.

A mintavételi frekvencia nagyon sok esetben műszakilag előre meghatározott és nem tetszés szerint változtatható. Az említett, nem kívánatos aliasing jelenség fellépésének megakadályozására a fél mintavételi frekvenciánál nagyobb frekvenciájú összetevőket tartalmazó

jeleket előzetesen aluláteresztő szűrőn kell át bocsátani. Követelmény, hogy az ilyen szűrő átviteli jellemzői lehetőleg közelítsék meg az ideális aluláteresztő szűrőét, azaz a nagy levágási meredekség és a határfrekvencia fölötti kielégítő zárócsillapítás mellett adott esetben az átviteli sávban is kicsi hullámosságú legyen az átviteli függvény értékének logaritmus, hogy az átviteli tartományban lehetőleg kicsi fázishibák lépjenek fel.

Nagyon sok műszaki jelfolyamat spektruma már eredendően aluláteresztő szűrő jellegű, vagyis ezek frekvenciaspektruma a nagyobb frekvenciák felé haladva többé vagy kevésbé határozott mértékben csökken, és így ilyen esetekben kisebb levágási aliasing szűrők is alkalmazhatók. Normális körülmények esetén a kb. 40 dB értékű amplitúdócsillapítás kielégítő. Ezt az értéket Csebisev-jelleggörbéjű, kétpólusú aluláteresztő szűrővel kb.  $f=7f_g$ , megfelelő, négy-pólusú Butterworth-szűrővel  $f=2f_g$  értéknél lehet elérni, ha a bemenő jel szélessávú fehérzaj. A rendkívül szigorú műszaki követelmények miatt a jó antialiasing szűrők még ma is meglehetősen drágák. Megfelelően jó, ill. nagyon jó értékeket lehet elérni az ún. kapcsolt kapacitású, integrált szűrők alkalmazásával. Az ilyen szűrők integrált áramköri egységként kaphatók, és nagy részük kiváló specifikációjú.

#### **4.2 Kvantálási zaj:**

A mintavételezett jelek időben diszkrét értékei tisztán műszaki szempontok miatt is csak véges szóhosszúságú adatszavakká képezhetők le. Ez azt jelenti, hogy minden amplitúdóértéket csak közvetlenül az adatszavak hosszúságával összefüggő, véges pontossággal lehet kódolni. Így a megengedett amplitúdótartomány véges számú, diszkrét amplitúdóintervallumra oszlik. Ezt a folyamatot amplitúdókvantálásnak nevezzük. Az amplitúdókvantálás fizikailag azt jelenti, hogy a mintavételezett értékek egy része eltér a mintavételi időpontokban ténylegesen fennálló amplitúdóértékektől. Ezek az eltérések a kvantáló szabályos működése esetében átlagosan egy fél kvantálási lépés értékűek lehetnek. Ezek az eltérések a jelértékekben mint a valódi amplitúdóértékre szuperponált statisztikus amplitúdóeloszlású zavarjel jelentkeznek. Az így keletkezett zavarjelet kvantálási zajnak nevezik.

#### **4.3 A nem ideális mintavétel következtében keletkező zavarok:**

A mintavételi folyamatok tárgyalásakor általában hallgatólagosan feltételezik, hogy a mintavételi értékeket a mindenkori mintavételi időpontokban pontosan és elenyészően rövid idő alatt lehet meghatározni, azaz a mintavételi jelek sorozata magának az analóg függvénynek és azonos távolságú túimpulzusoknak a szorzataként értelmezhető. A túimpulzusokat

általában a  $\delta(t)$  szimbólummal jelzik. Ezek definíciószerűen kielégítik az alábbi összefüggést:

azaz  $\delta(t)$  csak végtelen kis értékű argumentumnál létezik (függetlenül attól, hogy ez hogyan van definiálva). A  $\delta(t-n\Delta t)$  függvény ebből következően csak  $t-n\Delta t=0$  esetben, azaz  $t=n\Delta t$  esetben létezik. Ezzel egy analóg időfüggvény mintavételi értékeit a következő képlettel lehet leírni:

Egyetlen műszaki berendezés sincs azonban abban a helyzetben, hogy a mintavételezési folyamatot az elvileg megkövetelt, elenyészően rövid idő alatt valósítsa meg. Ez azt jelenti, hogy adott körülmények között a mintavételezendő jel amplitúdója még a mintavételezési fázis közben megváltozhat. Ez különösen akkor következik be, ha az amplitúdóváltozás differenciálhányadosa (sebessége) nagyon nagy. A mintavevőimpulzusok már nem értelmezhetők túimpulzusokként, hanem sokkal inkább véges,  $b$  időtartamú impulzusokként kell őket tekinteni. A mintavételezési folyamatok periodikusan ismétlődő spektruma ennek során egy  $(\sin x)/x$  függvénynek megfelelő amplitúdósúlyozást kap, ahol  $x = nb\pi/\Delta t$ . E függvény értéke  $b$ -tól erősen függ.

## 5. A/D és D/A konverterek

Általában egy objektumon elvégzett méréshez szükséges a mérendő tárgy gerjesztése, aminek hatására a tárgy válaszokkal reagál. Ezen válaszok közül kell kiválasztanunk a minket érdeklő részválaszokat és ezeket vezetjük a mérőműszerbe. A mérőműszer előtt a legtöbb esetben mérőátalakító (szenzor, detektor) van, ami olyan fizikai mennyiséggé alakítja a mérendő válaszjelet, ami közvetlenül kijelezhető.

### 5.1 A/D és D/A konverterek felépítése, tulajdonságai:

Az A/D és D/A konverterek sokoldalúan felhasználható eszközök, melyek lehetővé teszik áram vagy feszültség digitális formába alakítását, és digitális adatoknak megfelelő feszültségek, áramok előállítását. Ha a mérendő mennyiség nem ebben a formában áll rendelkezésre (például nyomás vagy hőmérséklet), akkor megfelelő mérőátalakítót (szenzort, detektort) kell alkalmaznunk. A digitális formának sok előnye van, példaként említhetjük a nagy pontosságot, megbízható adattárolást, jó jelátviteli és jeljavítási lehetőséget és a hatékony digitális adatfeldolgozási és vezérlési lehetőséget.

A D/A konverter általános feladata, hogy egy egész számmal arányos feszültséget szolgáltatson. A konverzió a következő formula alapján megy végbe

$$U = Z \frac{U_{ref}}{N} = Z \frac{U_{ref}}{2^b}$$

ahol  $U_{ref}$  a konverter referenciefeszültsége,  $N=2^b$  pedig a konverter pontosságára jellemző egész szám,  $b$  a bitek száma. A  $Z$  szám értéke 0 és  $2^b - 1$  között lehet. D/A konvertert használhatunk különböző alakú feszültségjelek előállítására, feszültséggel vezérelhető eszközök számítógéppel való vezérlésére, stb.

A gyakorlati megvalósítások közül példaként a leggyakrabban alkalmazott R-2R ellenálláshálózatos módszert ismertetjük.

A hálózattal előállítjuk az  $U_{ref}$  feszültség  $2$  hatványaival osztott értékeit, mivel minden vízszintes ellenállás után következő rész eredő ellenállása éppen  $R$ . A kapcsolók állásától függetlenül minden függőleges  $2R$  ellenállás alsó pontja  $0V$  potenciálon van, ezért az átfolyó áramok az ellenállás felső pontjain mérhető  $2^i \cdot U_{ref}$  feszültségekkel arányosak, pontosabban

$$I_i = 2^i \frac{U_{ref}}{2R \cdot 2^b}$$

Az árammérő által jelzett áram tehát

$$I = \sum_{i=0}^{b-1} Z_i \cdot 2^i \frac{U_{ref}}{2R \cdot 2^b} = \frac{U_{ref}}{2R \cdot 2^b} Z = \Delta I \cdot Z$$



Ebből látható, hogy az áram arányos a Z egész számmal, aminek kettes számrendszerbeli  $Z_1$  számjegyei a kapcsolók állásának felelnek meg.

A D/A konverterek jellemzői

A D/A konverterek felbontását a bitek számával jellemezzük. Ez a szám adja meg, hogy a realizálható feszültségtartomány hány elemi egységre oszlik, tehát a pontosságot is elvileg ez szabja meg.

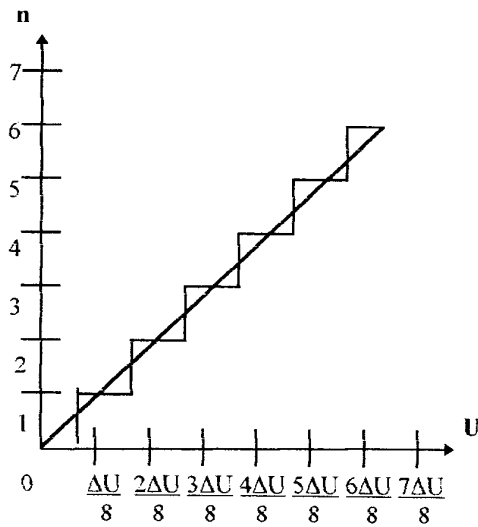
Statikus jellemzők:

1. Felbontás, LBS
2. Offszethiba vagy nullponthiba
3. Erősítéshiba
4. Differenciális nemlinearitás
5. Integrális nemlinearitás
6. Hőmérsékletfüggés
7. Zaj

## 5.2 A/D konverterek

Az A/D konverter feladata, hogy egy U feszültségértéket Z egész számmá alakítson. Az U feszültségnek megfelelő Z egész számot a következő formula adja meg

$$Z = \left[ \frac{U \cdot 2^b}{U_{ref}} + 0.5 \right]$$



6. ábra

ahol  $U_{\text{ref}}$  a konverter referenciafeszültsége,  $b$  pedig a konverter pontosságára jellemző egész szám, az  $Z$  konvertált adat bináris számjegyeinek a számát jelenti. A bitek száma a konverter pontosságát jellemzi, mivel ez adja meg, hogy a teljes mérési tartományt hány részre bontjuk fel. Ha a bitek számát eggyel növeljük, akkor a pontosság kétszereződni fog. Az időben állandó referenciafeszültség a mérési tartományt szabja meg, a mérendő feszültség nem lehet nagyobb, mint a referenciafeszültség.

Sokszor előfordulhat, hogy a mérendő fizikai mennyiség nem feszültség, hanem például ellenállás, hőmérséklet, mágneses térerősség, nyomás, stb. Ilyen esetekben mérőátalakítókat (szenzorokat, detektorokat) használhatunk, amelyek az említett mennyiségekkel arányos (vagy legalábbis tőlük valamilyen ismert módon függő) elektromos jelet állítanak elő. Ilyen például a termoelem, a Hall-szonda.

Az A/D konverter megvalósítása a pontossági, sebességi követelményektől függően többféle lehet. A jel egész számmá alakítása mindig igényel valamekkora időt, ezt a jellemzőt nevezzük konvertálási időnek. Általában igaz, hogy a nagyobb pontosságú konverterek lassabb működésűek.

Általában a konverziót egy külső jellel indíthatjuk, így a konverzió az adott időpontbeli feszültségértékhez tartozó egész számot adja eredményül. A konverternek van egy kimenő vonala is, ami azt jelzi, hogy befejeződött-e a konverzió, vagy még folyamatban van. Nyilvánvaló, hogy a digitális adat csak akkor érvényes, amikor az átalakítás már befejeződött.

Az egyik legegyszerűbb átalakítási módszer az úgynevezett közvetlen módszer (flash A/D converter). Ennek a lényege, hogy előállítjuk az összes lehetséges diszkrét feszültség szintet, amiket az  $i \cdot \Delta U + \Delta U/2$  ( $i=0 \dots N-1$ ,  $b$ =bitek száma,  $\Delta U = U_{ref}/N$ ) képlet ad meg. A mérendő feszültséget komparátorokkal összehasonlítjuk az összes feszültség szinttel, és ebből már meghatározható a konvertált  $i$  érték, mivel erre teljesül, hogy

$$i \cdot \Delta U + \Delta U/2 < U < (i + 1) \cdot \Delta U + \Delta U/2$$

tehát azon a komparátorok kimenetein 1 van, amelyek indexe kisebb mint  $i$ , ezek száma viszont éppen  $i$ , ezt kell a dekódoló digitális áramkörnek kettes számrendszerbeli számmá alakítania.

Egy másik igen gyakran használt módszer az úgynevezett szukcesszív approximációs módszer, amelynek az a lényeg, hogy egy időpillanatban

egyszerre csak egy feszültség szintet állítunk elő, és a mérendő jelet ezzel vetjük össze.

Ennél sokkal hatékonyabb eljárást is találhatunk, ami a numerikus analízisből ismert bináris keresésének a logikáján alapszik. Először az  $i=N/2$  kódnak megfelelő szintet állítjuk elő. Ha a mérendő  $U$  feszültség ennél nagyobb, akkor a konvertált egész szám legfelső bitje biztosan egy, ellenkező esetben nulla. Az első összehasonlításkor tehát megállapítjuk, hogy a teljes mérési tartomány melyik felében található a mérendő feszültség. A következő lépésben megfelezzük azt az intervallumot, amelyikbe esett a mérendő jel, és most is megvizsgáljuk, hogy ezek közül melyikbe esik a mérendő jel. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg az összes bitet be nem állítottuk. Látható, hogy  $b$  bites konverter esetén  $b$  számú lépés szükséges a konverzió befejezéséhez, szemben a közvetlen módszerrel, ahol csak egy lépés kellett.

A harmadik gyakori eljárás a kettős integrálási módszer. A konverzió során a mérendő jelet integráljuk úgy, hogy az integrálási konstans nullának választjuk. Az integrált feszültség időfüggése ekkor a következő formulával adható meg:

$$U_i(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t U(t') dt'$$

ahol  $\tau$  egy konstans. Ha a mérendő  $U$  feszültség időben állandó, akkor ez a formula  $U_i=U*t/\tau$  alakúra egyszerűsödik, tehát  $U_i$  az idő lineáris függvénye. A konverzió első fázisában a mérendő  $U$  feszültségű egy adott

T ideig integráljuk, ekkor  $U_1$  értéke  $U_1=U \cdot T/\tau$  lesz. A második fázisban az integráló áramkör bemenetére a  $-U_{ref}$  referenciafeszültséget kapcsoljuk, és folytatjuk az integrálást egészen addig, amíg  $U_1$  értéke ismét visszatér nullába. Ha ezt a  $t_0$  időt megmérjük, akkor igaz lesz, hogy

$$U = \frac{t_0}{T} U_{ref}$$

Az integrálási módszerrel tehát időmérésre vezettük vissza a feszültségmérést. A digitalizálás úgy történik, hogy időtartamokat digitalizálunk egy fix  $f$  frekvenciájú kvarcoszcillátor segítségével. Ez első fázisban  $T=N/f$  ideig integrálunk ( $N$  fix egész szám, a konverzió maximális lehetséges értéke, pl. 4000), és a második szakaszban pedig megszámláljuk a  $t_0$  idő alatt bekövetkezett oszcillációk  $i$  számát. A konverzió eredménye tehát az  $i$  egész szám lesz, amiből a mérendő jel

$$U = \frac{t_0}{T} U_{ref} \approx \frac{i}{N} U_{ref}$$

Ezzel a módszerrel persze lehet időben változó jelet is mérni, ekkor a mérés eredménye a feszültség  $T$  idő alatt számított átlagértéke lesz. Ez abból látható, hogy időfüggő jelre

$$\frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt = \frac{t_0}{T} U_{ref}$$

Ez az oka annak, hogy ezt a viszonylag bonyolultnak tűnő eljárást mégis gyakran alkalmazzák.

### 5.3 D/A konverterek alkalmazásai:

A legegyszerűbb feladat az időben állandó jelek előállítása. Ilyenre lehet szükség például egy dióda karakterisztikájának felvételekor, ha a gerjesztő áramot digitális jellel szeretnénk beállítani a kívánt értékre. A mérés elvégzéséhez természetesen használhatunk A/D konvertert, így a gerjesztés és a mérés is digitálisan kivitelezhető, de például használhatjuk egy adott test hőmérsékletének szabályozására is: az A/D konverterrel mérjük a hőmérsékletet, a D/A konverterrel pedig szabályozzuk a fűtőszálban folyó áramot.

A D/A konverterek másik gyakori alkalmazása az időfüggő jelek kezelése. Ha a referenciafeszültség helyére időfüggő jelet kapcsolunk, akkor ennek amplitúdója arányos lesz a bemeneti egész számmal. Ilyen módon digitálisan vezérelhető potenciométerhez jutunk. Ennek egy mérés technikai alkalmazása lehet például periodikus vagy más időfüggő gerjesztőjelek amplitúdójának digitális vezérlése. Egy másik gyakorlati alkalmazás a hangtechnikában a hangerősség digitális szabályozása digitális keverőpultokban és egyéb hangtechnikai eszközökben.

Mivel gyakorlatilag tetszőleges jelalak előállítható, így rendszerek jelének szimulálására is alkalma, például EKG jeleket állíthatunk elő egy mérőberendezés tesztelése céljából, vagy fizikai rendszerek jeleit állíthatjuk elő a rendszerek jelenléte nélkül is. Gyakori a hangfrekvenciás jelek előállításának ez a módja is: digitális magnókban, CD-lejátszóknál.

Mivel a digitális jelek analóg jelekké való konvertálása a gyakorlatban igen gyors lehet, így nagyfrekvenciás jelek is előállíthatók. Ilyen alkalmazás a számítógépek monitorait vezérlő jelek előállítása, ahol másodpercenként 50-70 alkalommal kell a képernyőpontokat analóg jellel előállítani.

#### **5.4 A/D konverterek alkalmazásai:**

Az A/D konverterek legegyszerűbb alkalmazása az időben állandó vagy lassan változó jelek mérése. A kívánt pontosságnak megfelelő konvertert választhatunk ebben az esetben, mivel a konverziós idő nem korlátozó tényező. Célszerű a kettős integrálási elven működő eszköz használata a jó zavarlenyomóképesség miatt. Ilyen méréseket végzünk például a digitális multiméterekkel.

Az A/D konverterek alkalmasak időben változó jelek mérésére is, mintavételezéses mérési eljárással. A legtöbb analóg-digitál konverziós eljárás esetén a konverzió alatt az A/D konverter bemenetén a jelnek állandónak kell lennie, ellenkező esetben hibás adatot kapunk. Mivel a mérendő jelre ez a feltétel nem teljesül, ezért ezt egy úgynevezett mintavevő-tartó áramkörrel biztosítjuk. Természetesen ezután a mintavevő-tartó áramkör fogja meghatározni, hogy milyen gyorsan változó jeleket digitalizálhatunk megfelelő pontossággal.

## 6. Analóg jelek digitális elemzése

### 6.1 Periodikus függvények Fourier-sorba fejtése

A valós leírású Fourier-sor:

A J. B. de Fourier által megfogalmazott tétel az alábbi alakban írható le:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k t) \quad *$$

A képletben  $f(t)$  periodikus időfüggvény, amely definíció szerint kielégíti a képlet szerinti feltételt:

$$f(t) = f(t + nT_0)$$

A feltétel azt jelenti, hogy minden, a  $t$  független változótól függő  $f(t)$  függvényérték a  $T_0$  periódusidő egész számú többszöröse után megismétlődik. Az említett  $T_0$  periódusidő az egyenletben a szinuszos és koszinuszos tagokban az  $\omega_k$  körfrekvenciával együtt lép fel. Érvényes a következő összefüggés:

$$\omega_k = k\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} k = 2\pi f_0 k$$

Az  $f_0 = 1/T_0$  mennyiséget az  $f(t)$  periodikus függvény alaphfrekvenciájának szokás nevezni.

A \* egyenlet egyszerűbb írásmódja a következő:



$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 + \varphi_k)$$

$$\text{ahol } A_0 = a_0; \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{és} \quad \varphi_k = \arctg(b_k/a_k)$$

A periodikus időfüggvény  $A_k$  és  $\varphi_k$  értékekkel leírt spektrumát a szokásnak megfelelően az  $\omega_k = k\omega_0$  helyeken vonalakkal ábrázolják, amely vonalak hosszúságát az  $A_k$  ill.  $\varphi_k$  számértékek határozzák meg. Az ilyen spektrumot ezért vonalas spektrumnak szokás nevezni.

Ha az alapfrekvencia valamennyi egész számú többszörösénél létezik spektrumvonal, ezekből az alapfrekvenciára akkor is következtetni lehet, ha ez az átviteli vonal felüláteresztő jellege következtében (pl. egy távbeszélő-csatorna, amelynek alsó határfrekvenciája 350 Hz) a vevőoldalon nem is jelenik meg. Pl. egy férfihang alapfrekvenciája általában 120 és 150 Hz közé esik. Bár a távbeszélő-csatorna csak az első vagy talán csak a második felharmonikust viszi át csillapítás nélkül, beszélgetőpartnerünket mégsem halljuk egy vagy két oktávval magasabban beszélni. Az ember hallórendszerének elegendő a spektrumvonalak távolságának ismeret, hogy a hangot megfelelő hangmagassággal interpretálja.

## 6.2 A komplex írásmódú Fourier-sor

A Fourier-sor eddig bemutatott, valós írásmódja nagyon sok esetben ugyan közel áll a gyakorlathoz és szemléletes, azonban a jelanalízis problémák általános tárgyalására meglehetősen kényelmetlen. Ebben az

esetben a komplex írásmód jelenti a kivezető utat, amely a tétel jelentős formális egyszerűsítéséhez vezet. A komplex írásmódot felhasználva, a Fourier-sorba fejtés a következő alakban adható meg:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{(jk\omega_0 t)}$$

Az  $\exp(jk\omega_0 t)$  tényezőt, valamint a trigonometriai függvényeket a következő összefüggés kapcsolja össze:

$$e^{(jk\omega_0 t)} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)$$

A  $\underline{C}_k$  amplitúdótényező, amely a már ismert  $a_0$ ,  $a_k$  és  $b_k$  Fourier-együtthatókat helyettesíti, komplex szám, amit - mint már fentebb említettük - a  $C$  aláhúzása jelöl.

Előnyös az is, hogy az  $a_0$ ,  $a_k$  és  $b_k$  Fourier-együtthatókra vonatkozó három egyenlet most egyetlen összefüggésbe foglalható össze. Érvényes ugyanis a következő összefüggés:

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

ahol  $k=0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

és  $\underline{C}_k = \underline{C}_{-k}^*$

A következő egyenletekben az  $a_k$  és  $b_k$  valós Fourier-együtthatók, valamint a  $\underline{C}_k$  komplex együttható kapcsolatát láthatjuk:

$$\underline{C}_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - b_k), \dots \text{ha} \dots k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{|k|} + jb_{|k|}), \dots \text{ha} \dots k < 0 \\ a_0, \dots \text{ha} \dots k = 0 \end{cases}$$

### 6.3 Nemperiodikus jelek Fourier-analízise

A Fourier-tételnek nemperiodikus jelekre történő kibővítése és módosítása a Fourier-integrál bevezetését teszi szükségessé, amely a digitális jelanalízisben fontos szerepet játszó diszkrét Fourier-transzformációs algoritmus alapja.

### 6.4 A Fourier-integrál

Mivel a diszkrét spektrumban a spektrumvonalak egymás közti távolsága a periódusidővel fordítva arányos, ez azt jelenti, hogy  $\Delta f$  nullához tart és végül eltűnik, azaz

$$\Delta f \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad T_0 \rightarrow \infty.$$

Így tehát a vonalas spektrum helyett folytonos, elkent spektrum jön létre, vagyis a vonalak távolsága olyan kicsire csökken, hogy a spektrum már nem bontható fel diszkrét vonalakra.

Az említett határátmenet elvégzésekor az összeg integrállá fajul, hiszen ez nem más, mint a végtelen kicsi  $\Delta f$  tartományokra vett függvényértékek összege. Ezen a módon jutunk el a Fourier-tétel

integrálalakjához. A sorfejtés esetében hasonlóan ismét két képlet létezik, amelyek a különböző tartományokban található jeleket egymással összekapcsolják:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

és

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Az  $\underline{F}(\omega)$  a folytonos spektrális függvény, amely a periodikus függvények sorfejtésében eredetileg szereplő diszkrét  $\underline{C}_k$  amplitúdó-együtthatóknak felel meg. Ez komplex mennyiség, és ezért - amint az már ismeretes - valós és képzetes részre, vagy érték- és amplitúdófüggvényre bontható fel:

$$\begin{aligned} \underline{F}(\omega) &= \operatorname{Re}\{\underline{F}(\omega)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{F}(\omega)\} = R(\omega) + jX(\omega), \\ |\underline{F}(\omega)| &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}. \end{aligned}$$

Az  $F(\omega)$  függvényt általánosan az  $f(t)$  időfüggvény Fourier-transzformáltjának szokás nevezni.

Itt kell megjegyeznünk, hogy nem minden, műszaki szempontból fontos, nemperiodikus folyamatnak van Fourier-transzformáltja. Az  $F(\omega)$  létezésének egyik szükséges feltétele, hogy az

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

integrál értéke véges legyen, azaz véges értékhez konvergáljon.

Különösen fontos az, hogy az  $F(\omega)$  most már az összes frekvenciára vonatkozó amplitúdó- és fázisinformációt tartalmazza. Ennek előfeltétele azonban, hogy az integrálást a képlet által megkövetelt, végtelen hosszú időre végezzük el.

Általában érvényesek a következő kijelentések:

1. A nemperiodikus jeleknek folytonos frekvenciaspektruma van,

amelyet az 
$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

ír le, amennyiben az  $\underline{F}(\omega)$  transzformált létezik.

2. Az  $\underline{F}(\omega)$  spektrum általában komplex. A spektrumot valós és képzetes részével, vagy érték- és fázisfüggvényével lehet a frekvencia függvényében ábrázolni.

3. Ha  $\underline{F}(\omega)$  ismert, akkor a hozzá tartozó  $f(t)$  időfüggvényt az inverz Fourier-transzformációs

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \exp(j\omega t) dt$$

kifejezés alkalmazásával lehet helyreállítani.

4. Ha  $f(t)$  páros függvény, akkor  $\underline{F}(\omega)$  szintén páros, és csak valós része van.

5. Ha  $f(t)$  páratlan függvény, akkor  $\underline{F}(\omega)$  páratlan, és csak képzetes része van.

6. Az  $\underline{F}(\omega)$  valós része mindig páros, képzetes része mindig páratlan függvény.

## 6.5 Mintavételezett jelek Fourier-transzformáltja

Nyilvánvaló, hogy a mintavételezett jelekre a Fourier-transzformáció közvetlenül nem alkalmazható, mivel a végtelen kis mintavételi tartományokat előíró követelmény a gyakorlatban nem valósítható meg (ez ugyanis a  $\Delta t = \frac{1}{f_m}$  összefüggés következtében végtelen nagy mintavételi sebességet követelne meg). Ekkor az eredetileg folytonos  $t$  változót diszkrét változóval helyettesítik, és az integrál helyett diszkrét összeget alkalmaznak.

$$t_n = n\Delta t \quad -\infty \leq n \leq \infty.$$

Ekkor az egyenlet a következőképpen módosul:

$$\underline{F}'(\omega) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \exp(j \cdot 2\pi n f \Delta t).$$

$\underline{F}'(\omega)$  a mintavételezett jel Fourier-transzformáltja. A Fourier-transzformációnak ez a módosított, a diszkrét adatstruktúrához illesztett alakja egyelőre nem vesz más figyelembe, mint azt, hogy az eredetileg folytonos értékű és folytonos idejű  $f(t)$  jel a mintavételezés következtében a  $t=n\Delta t$  időpontokban van definiálva, tehát diszkrét idejű  $f(n\Delta t)$  mintavételezett jellé alakul át.

Az  $\underline{F}(\omega)$  kifejezéssel szemben az  $\underline{F}'(\omega)$   $\omega$ -ban periodikus, azaz az  $\underline{F}'(\omega)$  spektrum  $\Omega=2\pi/\Delta t$  frekvenciával periodikusan ismétlődik:

$$\underline{F}'(\omega) = \underline{F}(\omega + n\Omega) \quad -\infty < n < \infty.$$

A Fourier-transzformáció egy alapvető tétele, a konvolúciós tétel azt mondja ki, hogy két, egymással multiplikatív módon összekapcsolt függvény transzformáltja egyenlő az egyes függvények transzformáltjának konvolúciójával. A konvolúciót önálló jellel, a csillaggal (\*) szokás jelölni, és a tétel úgy írható fel, hogy

$$\underline{F}'(\omega) = \underline{S}(\omega) * \underline{D}(\omega).$$

Ez az

$$\underline{F}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega) \underline{D}(\omega - \omega') d\omega'$$

konvolúciós integrál rövidített írásmódja.

## 6.6 Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

Egy analóg jel  $T_F$  időtartamon belüli mintavételezésével kapott,  $N$  számú diszkrét adatérték az

$$N = \frac{T_f}{t}$$

képlettel kapcsolódik a  $\Delta t$  mintavételi tartományhoz és ezzel az  $f_m$  mintavételi frekvenciához. Mivel a számítógépben ezeket az adatokat egy adatblokkban helyezik el, az  $N$  számot általában blokkhosszúságnak nevezik.

Ha egy jel  $N$  számú mintavételi értéke áll rendelkezésre, akkor először tisztán formálisan érvényes a következő egyenlet:

$$\underline{F}(\omega_M) = \Delta t \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} f(n\Delta t) \exp(-jM\Delta\omega nt).$$

Így az  $\underline{F}(\omega)$  spektrális mintavételezéséhez jutunk. A DFT összetevők  $\Delta\omega$  távolsága fordítva arányos a már fentebb bevezetett  $T_F$  ablakszélességgel:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_F}.$$

Ha az egyszerűbb írásmód kedvéért  $\underline{F}(M\Delta\omega)$  helyett csak  $\underline{F}(M)$ , valamint  $f(n\Delta t)$  helyett csak  $f(n)$  kifejezést írunk, akkor az irodalomban és az analízatorok kézikönyveiben gyakran használatos alábbi összefüggést kapjuk meg:

$$\underline{F}'(M) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \cdot 2\pi Mn / N).$$

Mint mindig, a felírt diszkrét Fourier-transzformációnak is létezik inverz transzformációs algoritmus, az inverz diszkrét Fourier-transzformáció (IDFT). Ezt az algoritmust az

$$f(n) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=0}^{N-1} \underline{F}(m) e^{(j \cdot 2\pi mn / N)}$$

összefüggés adja meg. Figyelembe kell venni azt, hogy a visszatranszformáláshoz valamennyi  $N$  összetevőre, tehát a  $(N/2-1)\Delta\omega$  értéknél nagyobb frekvenciájú összetevőkre is szükség van.



## 7. Korrelációs függvények

A lineáris rendszerek jellemzésének eddig tárgyalt módszerei azon alapultak, hogy megvizsgáltuk a rendszer feleletét valamilyen gerjesztés hatására. A feleletet és a gerjesztést összekapcsoló függvényt tekintettük rendszerjellemező függvénynek. A jelátvivő vagy szabályozó rendszerek gerjesztése nem meghatározott függvénye az időnek, hanem – bizonyos törvényszerűségeken belül – véletlenszerűen változik. Ilyen sztohasztikus gerjesztések statisztikus tulajdonságaikkal jellemezhetők. Ilyen jellemzők pl. a jel középértéke, négyzetes középértéke vagy korrelációs függvénye.

Az  $x(t)$  sztohasztikus függvényt akkor tekinthetjük adottnak, ha ismerjük minden eloszlásfüggvényét vagy minden sűrűségfüggvényét. Az egyváltozós eloszlásfüggvény

$$F_{t_a}(x_1) = P[x(t_a) < x_1]$$

annak valószínűségét adja meg, hogy  $x(t)$  a  $t_a$  pillanatban kisebb egy meghatározott  $x_1$  értéknél. Az egyváltozós sűrűségfüggvény:

$$p_{t_a}(x_1) = \frac{\partial F_{t_a}(x_1)}{\partial x_1}$$

vagyis  $p_{t_a}(x_1)\Delta x_1$  annál pontosabban adja annak valószínűségét, hogy  $x(t)$  a  $t_a$  pillanatban  $x_1$  és  $x_1 + \Delta x_1$  közötti érték, minél kisebb  $\Delta x_1$ .

A sztohasztikus folyamatot teljesen jellemzik eloszlásfüggvényei vagy sűrűségfüggvényei. Ezek tényleges meghatározása azonban gyakorlatilag nem végezhető el, hiszen végtelen sok van belőlük. Külön problémát jelent,

hogy többnyire csak az  $x^{(i)}(t)$  regisztrátumokat ismerjük és az  $x(t)$  függvényt nem. Éppen ezért megelégszünk egyszerűbb jellemzőkkel, amelyek ugyan nem határozzák meg a sztohasztikus folyamatot, de felvilágosítást adnak leglényegesebb adatairól.

Az  $x(t)$  sztohasztikus függvény legdurvább jellemzője az elsőrendű momentuma vagy középértéke:

$$\mu_{1(t_a)} = E[x(t_a)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_{t_a}(x_1) dx_1$$

Pontosabb jellemzéshez megadjuk a másodrendű momentumot, mely a sztohasztikus függvény két időpontban felvett értéke szorzatának középértéke vagy korrelációs függvénye:

$$\mu_{11}(t_a, t_b) = E[x(t_a)x(t_b)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{t_a, t_b}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

A korrelációs függvény fizikai tartalma:

$$\mu_{11}(t, t) = E[x^2(t)],$$

vagyis a jel négyzetének középértékét adja.

Az első két momentum, vagyis a középérték és a korrelációs függvény nem jellemzi egyértelműen a sztohasztikus függvényt. Ennek ellenére e két jellemző ismeretében számos gyakorlati feladatot megoldhatunk.

Az időbeli közepelést az  $x(t)$  sztohasztikus függvény egyetlen, pl.  $x^{(1)}(t)$  realizációjára végezzük el és így elvben az

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^{(1)}(t) dt$$

$$\phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^{(1)}(t) x^{(1)}(t + \tau) dt$$

összefüggésekkel számítsuk a középértékeket és a korrelációs függvényt. Mivel a reprezentációnak általában csak a mért regisztrátumát ismerjük, ezért az integrálokat összegekkel közelítjük meg:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n x^{(1)}(kT_0);$$

$$\phi(\tau) \approx \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n x^{(1)}(kT_0) x^{(1)}(kT_0 + \tau)$$

ahol  $T_0$  egy kis időköz – amelyen belül  $x^{(1)}(t)$  csak keveset változik – és  $n$  úgy választandó, hogy  $(2n+1)T_0 = T$  olyan nagy legyen, hogy növekedésével az eredmények gyakorlatilag már ne változzanak. Ezek a közelítő számítások elég hosszadalmasak; megfelelő pontossággal csak gépi úton végezhetők el.

### 7.1 A keresztkorrelációs függvény

Két stacionárius sztohasztikus jel – legyenek ezek  $x^{(k)}(t)$  és  $y^{(k)}(t)$  – keresztkorrelációs függvénye az összesség-középérték alapján:

$$\phi_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^{(k)}(t) y^{(k)}(t+\tau)$$

Az ergodikus hipotézis alapján számolhatunk az időbeli átlagértékkel is:

$$\phi_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} = M[x(t)y(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt$$

Ha a két jel statisztikusan független egymástól, akkor szorzatuk várható értéke megegyezik várható értékük szorzatával. Ilyenkor tehát:

$$\phi_{xy}(\tau) = E[x^{(k)}(t) \cdot y^{(k)}(t + \tau)] = E[x^{(k)}(t)] \cdot E[y^{(k)}(t + \tau)]$$

Stacionárius folyamat esetén  $E[y^{(k)}(t + \tau)] = E[y^{(k)}(t)]$ . Az ergodikus hipotézis alapján független jelek esetén

$$\phi_{xy}(\tau) = \overline{x(t) \cdot y(t)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

## 7.2 Teljesítményspektrum

A korrelációs függvények spektruma:

$$\Phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

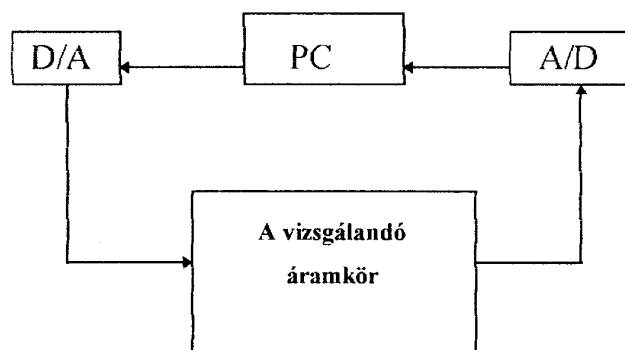
$$\Phi_{yy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yy}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

A  $\phi_{xy}(\tau)$  keresztkorrelációs függvény spektruma, tehát

$$\Phi_{xy}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) e^{j\omega t} dt \int_{-T}^T y_T(\vartheta) e^{-j\omega\vartheta} d\vartheta$$

## II. A módszer gyakorlati alkalmazása

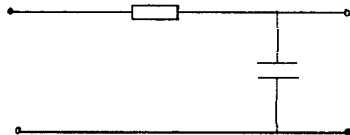
A méréseket az alábbi módon összeállított mérőberendezéssel végeztük el:



A számítógép által leadott jelet a D/A konverter egy feszültségértékké alakítja, majd az áramkör kimenetén mért feszültséget az A/D konverter visszaalakítja a számítógép által értelmezhető jellé. A módszernek több előnye is van az analóg mérési módszerekkel szemben. Így például igen nagy számú – több ezer – mérés elvégzése rövid idő alatt, a kapott adatok pedig a számítógépen rögtön fel is dolgozhatók. Az adatok nagy száma jelentősen megnöveli a mérés pontosságát ugyanakkor, – minthogy az értékelés is számítógépes úton folyik – nem jelent különösebb idővesztést.

## 1. RC tag átviteli függvényének meghatározása

Az alábbi ábra egy RC tag kapcsolási rajzát mutatja:



7. ábra

Általában ezt az áramkört szokásos aluláteresztő, vagy felülvágó körnek is nevezni.

A be- illetve kimenő feszültségekre a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$U_{be}(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C}$$

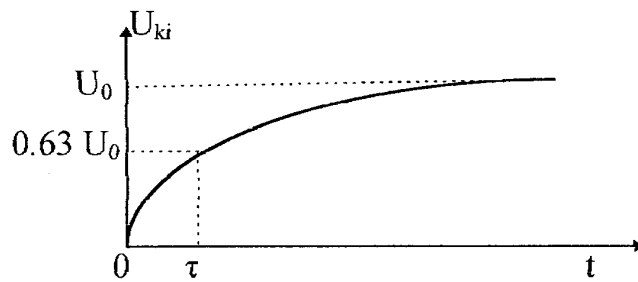
$$U_{ki}(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

A bemenő és a kimenő feszültség kapcsolatát a következő egyenlőség mutatja feszültségugrás esetén:

$$U_{ki}(t) = U_C(t) = U_{be}(t) - I(t)R = U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

ahol  $\tau = RC$ .

Az áramkör kimenetén a feszültség kezdetben erőteljesen növekszik, majd a feszültség lassan megközelíti a bemenő feszültséget. A kimenő feszültség  $t = \tau$  idő alatt eléri a bemenő feszültség 63%-át.



8. ábra

A mérés során meg kellett határozni a határfrekvenciát, illetve a mintavételi frekvenciát. A felhasznált ellenállás 620 ohmos, míg a kondenzátor 330 nF - os volt, innen a határfrekvencia:

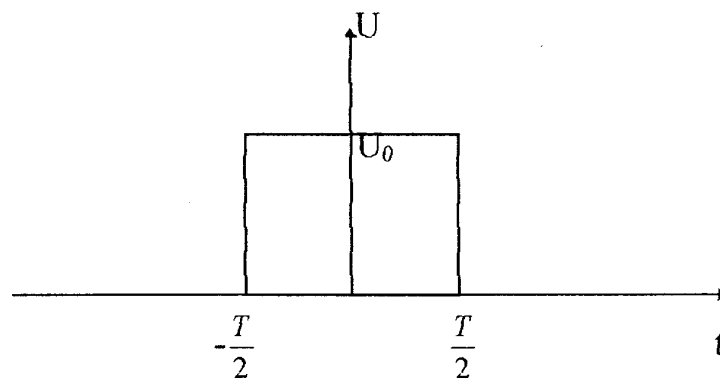
$$f_0 = 2\pi/RC \approx 15350 \text{ Hz,}$$

a mintavételi frekvenciának pedig legalább:

$$f = f_0/2 \approx 30700 \text{ Hz.}$$

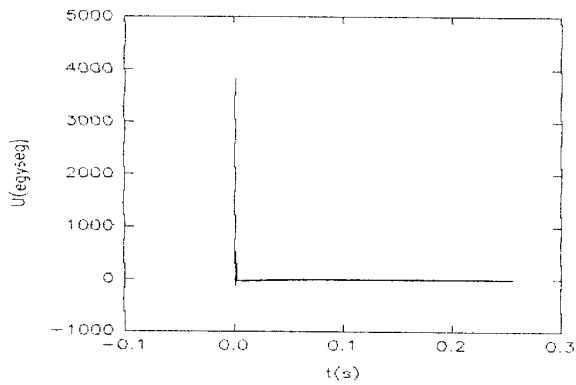
kellet volna lennie. A mérés során használt 48000 Hz-es mintavételi frekvencia azonban ennél jóval nagyobb volt.

Feszültségugrásnál nagyon kis szélességű négyszögjelet (tüimpulzust) használtam.



9. ábra

A következő ábra a számítógép által generált tüimpulzust mutatja.



10. ábra

Ennek Fourier transzformáltját, minthogy nem periodikus jel a Fourier-integrállal számíthatjuk ki.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Ez egy improprius integrál, tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cdot e^{j\omega t} dt = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b U(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Mivel } U(t) = \begin{cases} 0, & \dots \text{ha} \dots t < -\frac{T}{2} \\ U_0, & \dots \text{ha} \dots -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \dots \text{ha} \dots t > \frac{T}{2} \end{cases} \text{ ezért:}$$

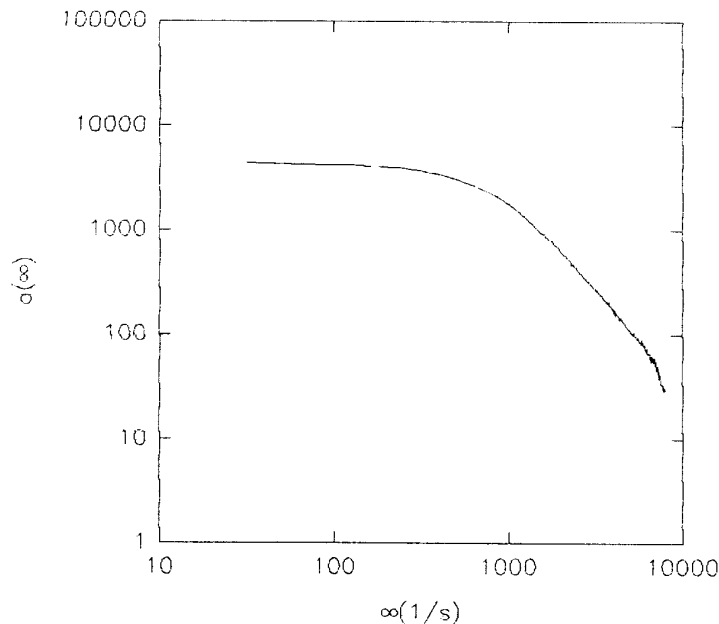


$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b U(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\frac{T}{2}} 0 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_0 \cdot e^{-j\omega t} dt + \\
&+ \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\frac{T}{2}}^b 0 \cdot e^{-j\omega t} dt = 0 + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_0 \cdot (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) dt + 0 = \\
&= U_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega t) dt + jU_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt = U_0 \left[ \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + jU_0 \left[ \frac{-\cos(\omega t)}{\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \\
&= U_0 \left[ 2 \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega} \right] + 0 = 2U_0 \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega}
\end{aligned}$$

Az általunk vizsgált áramkör átviteli függvénye tehát  $2U_0 \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega}$ .

val szorozódik, ez azonban csak igen kis frekvencián jelent eltérést.

Az integráló áramkör átviteli függvénye:



11. ábra

## 2. Tranzisztoros erősítő vizsgálata

A tranzisztorok legelterjedtebb típusa az ún. bipoláris, vagy rétegtranzisztor. Szerkezetük alapján a tranzisztorok két csoportra oszthatók: npn és pnp típusúak. Három elektródával rendelkeznek: emitter (E), bázis (B), és kollektor (C). Az emitteráram a bázisáram és a kollektoráram összege.

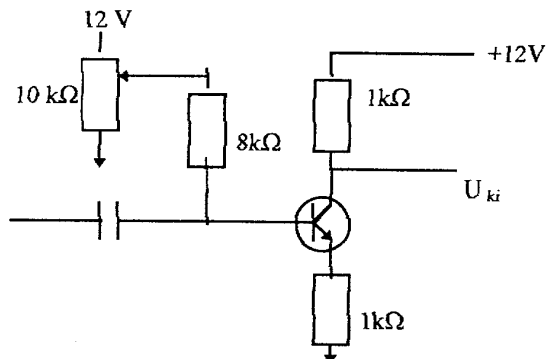
$$I_E = I_B + I_C$$

A bázisáramot és a kollektoráramot is a bázis-emitter dióda nyitófeszültsége szabályozza, ezért a két áram között közelítőleg arányosság áll fenn.

$$I_C = \beta I_B$$

A  $\beta$  mennyiséget áramerősítési tényezőnek nevezzük. Értéke kismértékben függ a kollektoráramtól.

A következő ábra az általunk vizsgált erősítő kapcsolási rajzát mutatja:

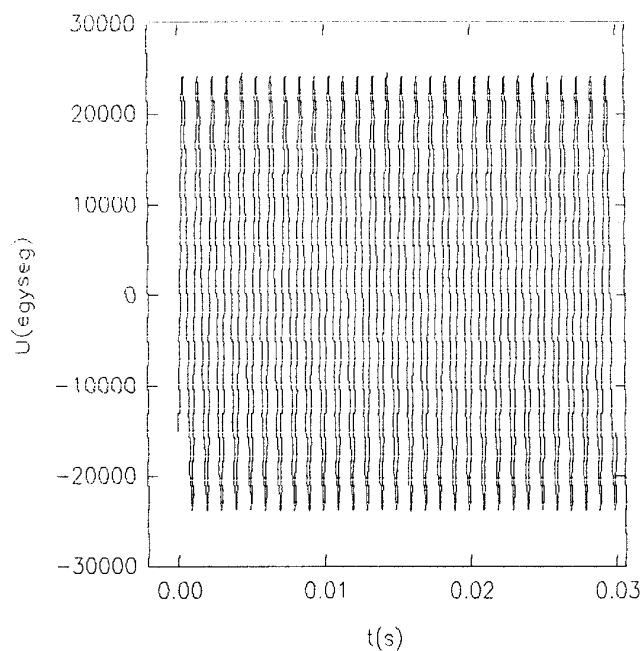


12. ábra

Vizsgálódásom során az erősítő torzítására voltam kíváncsi. Torzításon a jelek alakjának megváltozását értjük, ami oszcilloszkópon jól látható. Harmadéves laboratóriumi gyakorlatokon csak kvalitatív vizsgálati módszerek állnak a hallgatók rendelkezésére, itt azonban megpróbálom kvantitatív módon jellemezni az erősítő torzítását.

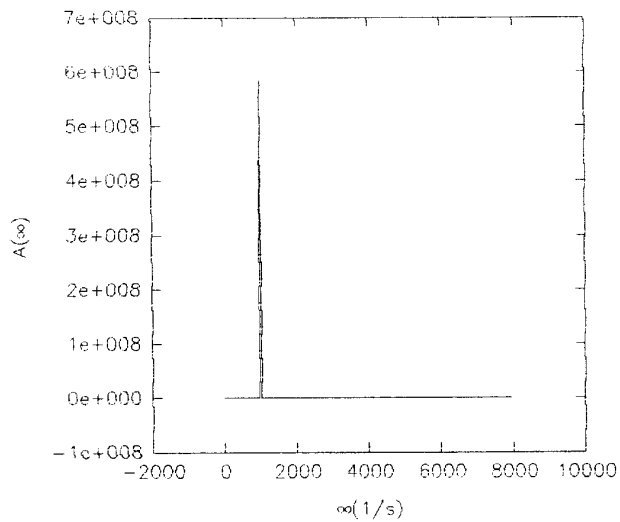
Az elektronikában a torzítást egy szinuszos jel felharmónikusainak keletkezésével mérik. Ezért a számítógéppel ezúttal szinuszos jelet generálunk és ezt vezetjük az áramkör bemenetére.

Az alábbi ábra a számítógép által generált jelet mutatja:



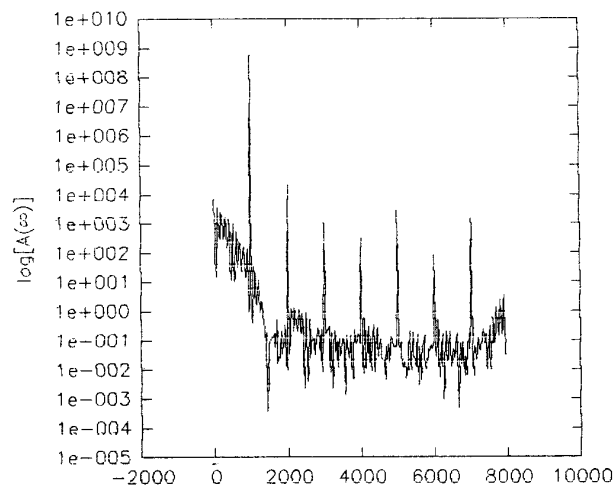
13. ábra

A bemenő jel spektrumából jól látható, hogy ez egy tiszta szinuszos jel volt.



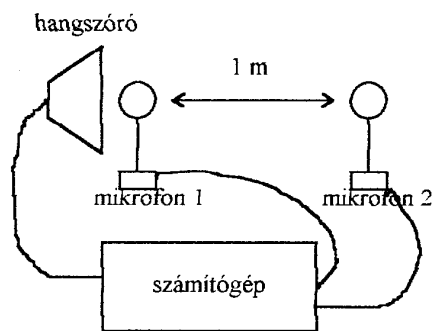
14. ábra

Ezek után a lemerő adatokból a számítógép segítségével meghatározzuk a jel spektrumát, és az y tengely logaritmálásával a felharmónikusok nagyon jól láthatóvá válnak.



### 3. Hangsebesség mérése

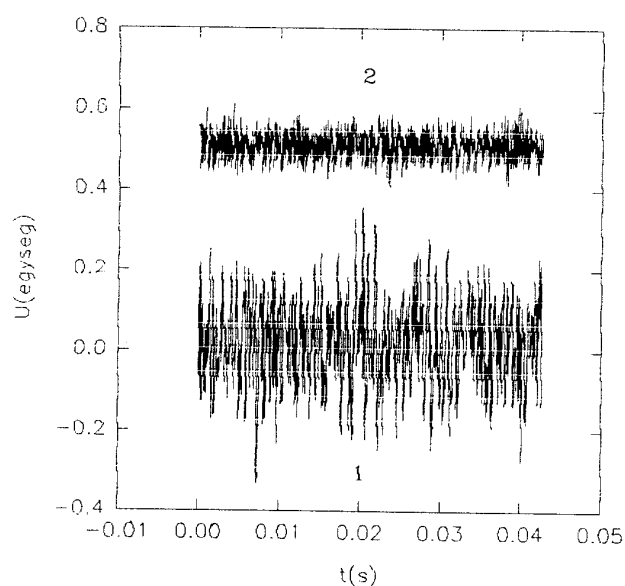
A hangsebesség méréséhez nagyon egyszerű eszközökre, mindössze két mikrofonra és egy hangszóra volt szükségünk. A kísérlet összeállítása a következőképpen történt:



15. ábra

A kísérlet körülményeiről annyit érdemes megjegyezni, hogy az első mikrofont célszerű a hangszórhoz minél közelebb tenni, és a két mikrofon távolságát nem szerencsés 1 m-nél nagyobbra választani, mert a mikrofonok által fogott jelek intenzitása a távolságok növelésével rohamosan csökken. Fontos tényező továbbá az is, hogy a mikrofonok talpai alá jó hangszigetelő anyag kerüljön, például valamilyen szivacs, mert ha az asztal lapja jól vezeti a rezgéseket, akkor a mikrofonok a talpukon és az állványukon keresztül berezonálhatnak, tönkrétéve így a mérés hitelességét.

A hangszóróra háromféle jelet bocsátottunk, első alkalommal zajt generáltunk, azután pedig túimpulzusok sorozatát, majd végül tiszta szinuszos jelet. A 16. ábrán a két mikrofon által érzékelt zajt láthatjuk, a második mikrofon jeléhez 0.5 egységet adtunk, hogy a két jel ne érjen egymásba.

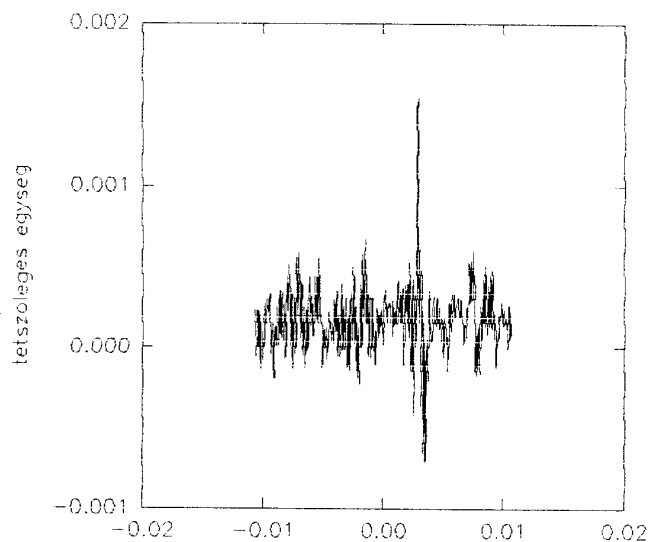


16. ábra

A kapott adatoknak a számítógépen keresztkorrelációját számolva következőképpen kaphatjuk meg a hangsebesség értékét. Minden egyes ábrán meg kell keresni a függvény maximumát, leolvassuk az időértékét, majd az 1 m-es távolságot ezzel elosztva megkapjuk a hangsebesség értékét.

$$v_h = \frac{1m}{t}$$

A számítógép által számolt keresztkorrelációs függvény zaj esetén:



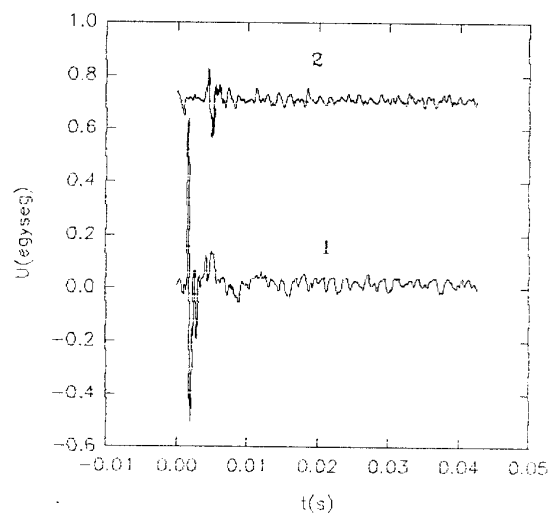
17. ábra

Az ábrán nagyon jól látható a függvény maximuma, melynek leolvasását többféle ábrázolóprogram megkönnyíti, ilyenek például DV16, SzigmaPlot (Plot 50) stb.

Az általam leolvasott maximumérték  $t = 2.854 \cdot 10^{-3}$  s-nál volt.

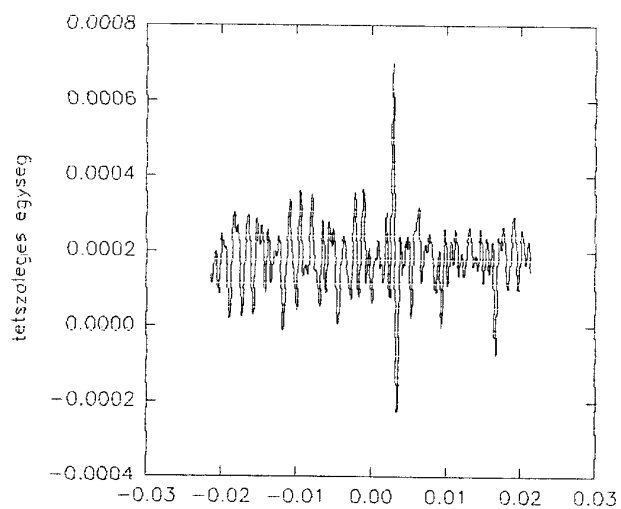
Ebből a hangsebesség értéke  $v = 350.38$  m/s.

Tűimpulzus esetén a mikrofonok kivezetésein mért jel:



18. ábra

Az ebből számolt keresztkorrelációs függvény pedig:



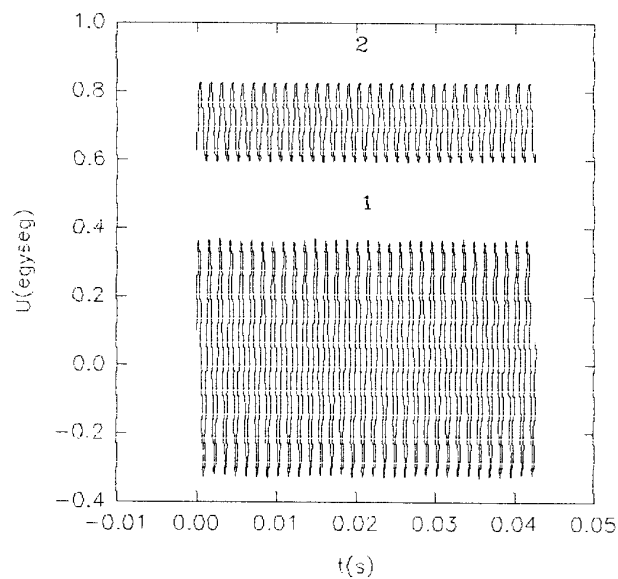
19. ábra

Akárcsak az előző esetben, itt is észrevehetjük, hogy a hangszórótól távolabbi mikrofon által érzékelt jel intenzitása



mennyivel kisebb. Ez esetben 0.7 egységet kellett hozzáadnom. A maximumhely most  $t = 2.852 \cdot 10^{-3}$  s-nál volt. A hangsebesség értéke ebből  $v = 350.65$  m/s.

Végezetül nézzük meg mi történik, ha a hangszóróra szinuszos jelet kapcsolunk. A mikrofonokon mért jel:

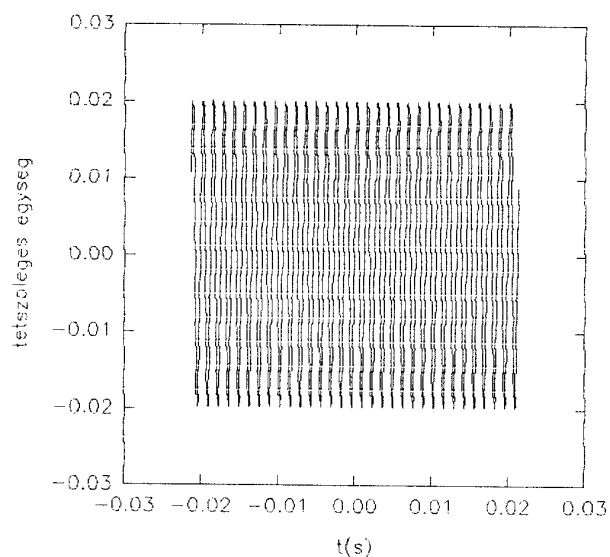


20. ábra

A két mikrofon értékei közötti különbség ezúttal is 0.7 egység.

Most azonban ha megnézzük a 21. ábrán a keresztkorrelációs függvényt, akkor azt látjuk, hogy rengeteg maximuma van, melyek közt nyilvánvalóan ott van az általunk keresett is, ezt azonban gyakorlatilag lehetetlen felfedezni. Ezért szerencsésebb az előző két módszer, ahol nagyon szépen, tisztán leolvasható volt ez az érték.

A keresztkorrelációs függvény:



21. ábra

Megjegyezhetjük továbbá azt is, hogy mivel a zaj-jeles és a tűimpulzusos mérés között fél óra sem telt el a számítógépes mérés miatt, ezért a kapott hangsebesség értékek összehasonlíthatók, hiszen ilyen rövid idő alatt gyakorlatilag nem tudnak megváltozni azok a külső fizikai paraméterek – például a légnyomás, a hőmérséklet vagy a levegő relatív páratartalma – melyek döntően befolyásolhatják a hang terjedési sebességét a levegőben.

## Összegzés

Ezen szakdolgozat céljával a digitális mérési eljárások alapjainak ismertetését tűztem ki néhány konkrét példán bemutatva. A cél megvalósítása érdekében a következőket próbáltam megtenni:

- **érthető, világos, tagolt elméleti áttekintés nyújtása**
- **egy integráló áramkör átviteli függvényének megmérése**
- **tranzisztoros erősítő torzításának vizsgálata**
- **hangsebesség mérése korrelációs számítás módszerével**
- **a mérések eredményeinek hiteles ábrázolása**

Az elvégzett mérések alapján általánosan elmondható, hogy az eddigi gyakorlathoz képest a számítógép használata olyan fokú segítséget nyújt, amely nélkülözhetetlenné teszi azt szinte minden fizikai kísérletnél, hiszen a mérési eredmények nagy számából eredő pontosság hihetetlenül rövid mérési idővel párosul, amely különösen szerencsés időben gyorsan változó jelek mérése esetén.

Célomat akkor értem el, ha mérési eredményeim a jövőben laboratóriumi gyakorlatokon felhasználhatók lesznek.

## Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. A mintavételezéses mérés	4
2. Az analóg és digitális jelek leírása	7
2.1 Folytonos értéktartományú és időben folytonos jelek	7
2.2 Diszkrét idejű, időben folytonos jelek	8
2.3 Folytonos értékű, diszkrét idejű jelek	8
2.4 Diszkrét idejű és időben diszkrét jelek	8
3. Analóg jelek osztályozása	10
4. Jeltorzulások a mintavétel következtében	11
4.1 Aliasing zaj	11
4.2 Kvantálási zaj	13
4.3 A nem ideális mintavétel következtében keletkező zavarok	13
5. A/D és D/A konverterek	15
5.1 A/D és D/A konverterek felépítése, tulajdonságai	15
5.2 A/D konverterek	17
5.3 D/A konverterek alkalmazásai	22
5.4 A/D konverterek alkalmazásai	23
6. Analóg jelek digitális elemzése	24
6.1 Periodikus függvények Fourier-sorba fejtése	24
6.2 A komplex írásmódú Fourier-sor	25
6.3 Nemperiodikus jelek Fourier-analízise	27

6.4 A Fourier-integrál	27
6.5 Mintavételezett jelek Fourier-transzformáltja	30
6.6 A diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)	31
7. Korrelációs függvények	33
7.1 A keresztkorrelációs függvény	35
7.2 Teljesítményspektrum	36
II. A módszer gyakorlati alkalmazása	37
1. RC-tag átviteli függvényének meghatározása	38
2. Tranzisztoros erősítő vizsgálata	42
3. Hangsebesség mérése	45
Összegzés	51
Tartalomjegyzék	52
Irodalomjegyzék	54

## **Irodalomjegyzék**

Hesselman: Digitális jelfeldolgozás (Műszaki Könyvkiadó, 1978)

Tietze-Schenk: Analóg és digitális áramkörök (Műszaki Könyvkiadó, 1992)

Siegmund Brandt: Statistical and computational methods in Data Analysis  
(North Holland Kiadó, 1989)

Fodor György: Lineáris rendszerek analízise (Műszaki Könyvkiadó, 1967)

Dr. Schnell László: Jelek és jelrendszerek mérés technikája  
(Műszaki Könyvkiadó, 1981)

Dr. Gingl Zoltán: Kézirat