Zajok és fluktuációk fizikai rendszerekben

Sztochasztikus rezonancia

Makra Péter

SZTE Kísérleti Fizikai Tanszék

2009-2010. őszi félév

Változat: 0.1 | Legutóbbi frissítés: 2009. november 4.

Tartalom

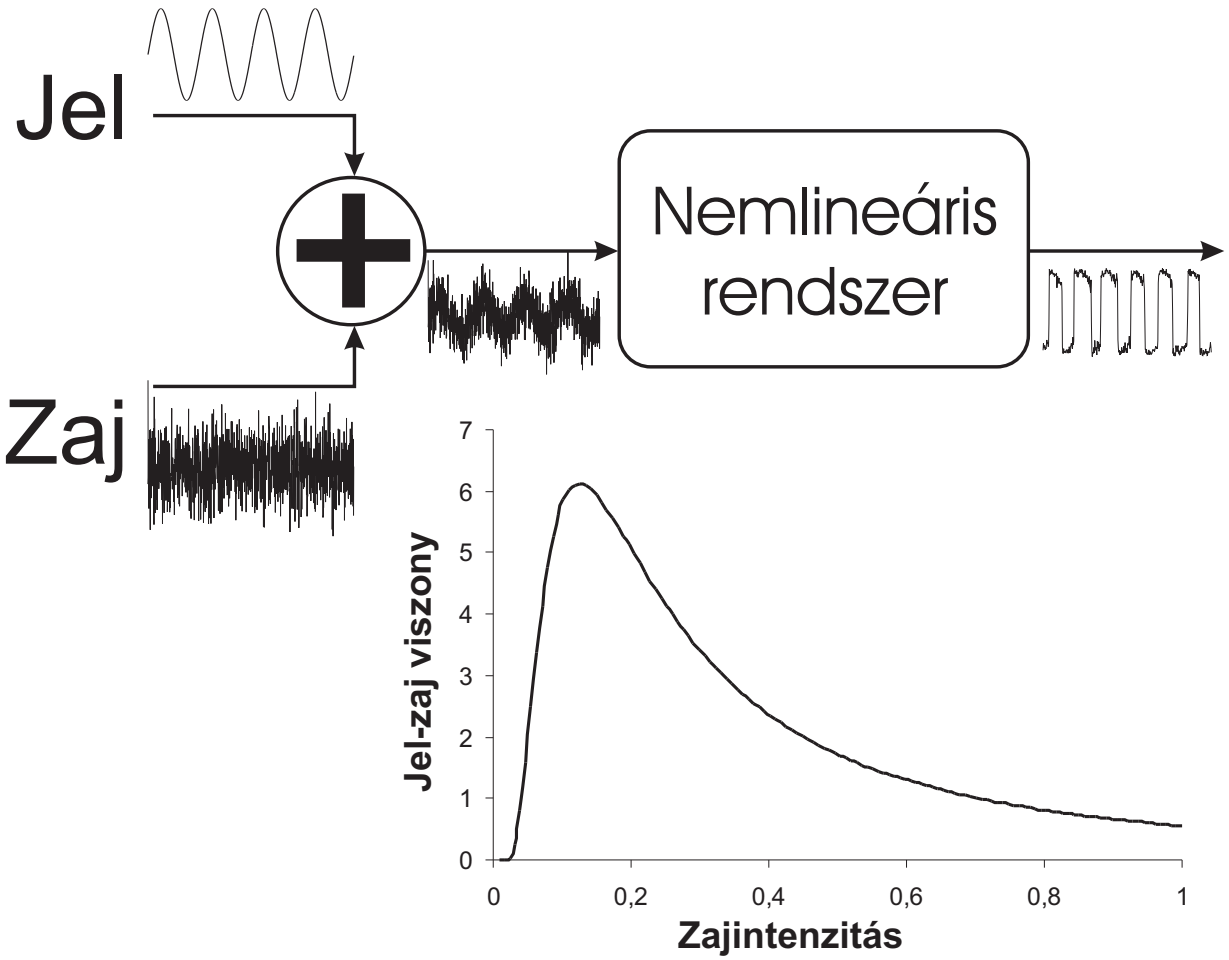
1. Bevezetés
2. A jel-zaj viszony
3. A sztochasztikus rezonancia eredete
4. Általánosított modell: a kettős potenciálvölgy
5. Sztochasztikus rezonancia biológiai rendszerekben
6. Jel-zaj viszony erősítés sztochasztikus rezonanciával
   - Jel-zaj viszony erősítés a kettős potenciálvölgyben
   - Jel-zaj viszony erősítés színes zajokra

Zajok jótékony szerepben

- zajok információforrásként
  - vízforralás
  - motordiagnosztika: motorhang
  - neutronfluxus-ingadozások mérése atomreaktorokban
  - integrált áramkörök roncsolásmentes megbízhatósági tesztje
  - szívritmus- és vérnyomásfluktuációk
- Lehet-e haszna a zaj növelésének? →
- zajok konstruktív szerepben
  - technikai alkalmazások – *dithering*
  - sztochasztikus rezonancia

Sztochasztikus rezonancia

Jelátvitel-optimalizálás zaj segítségével

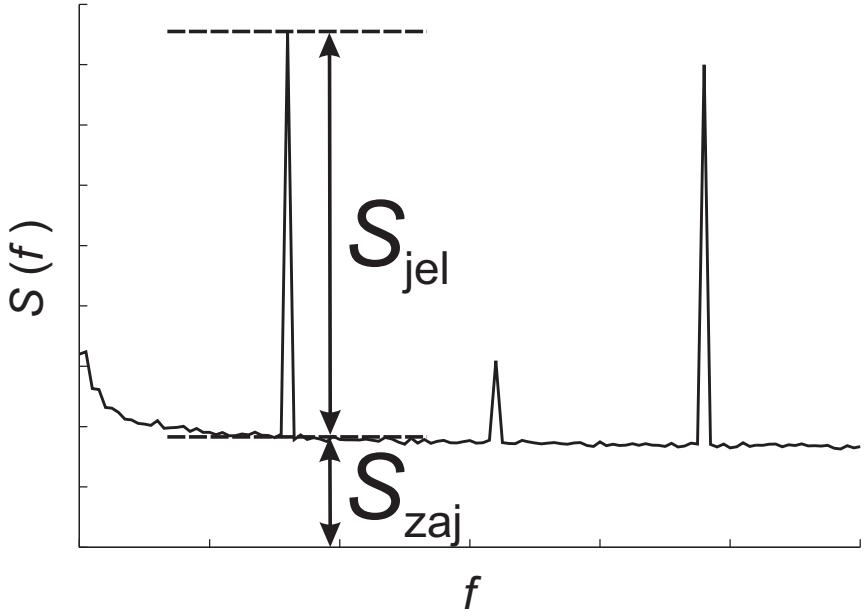


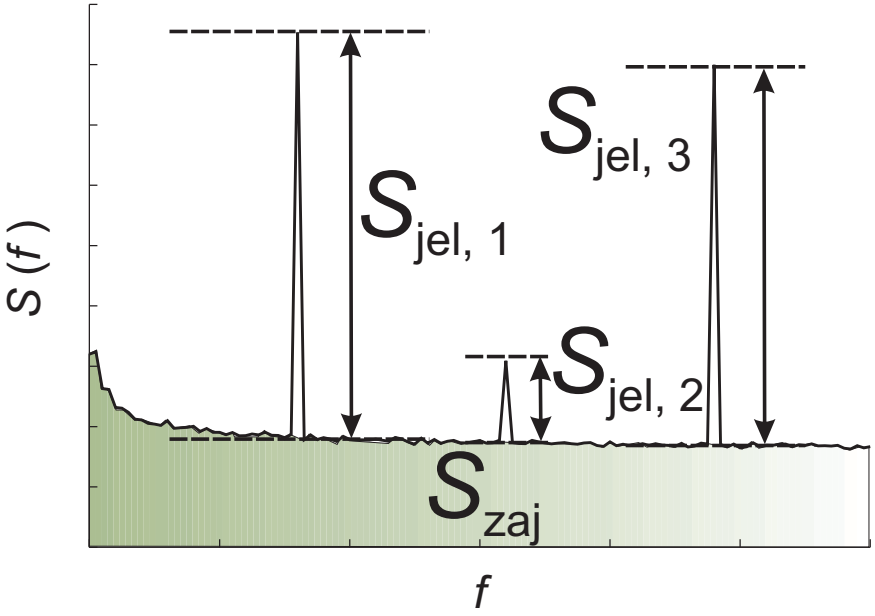
Sztochasztikus rezonanciát mutató rendszerek

- jégkorszakok váltakozása
- két stabil állapottal rendelkező lézer (gyűrűlézer)
- gyenge mágneses terek érzékelésére szolgáló eszköz: SQUID *(Superconducting Quantum Interference Device)*
- biológiai rendszerek (idegsejtek, érzékelés, pl hallás)
- általában: küszöbszinttel rendelkező rendszerek: monostabil, bistabil, multistabil zajos rendszerek

A jel-zaj viszony

- jel/zaj teljesítményhányados
  - keskenysávú: *az alapharmonikusnál*
  - szélessávú: *a teljes spektrumban*





A jel-zaj viszony

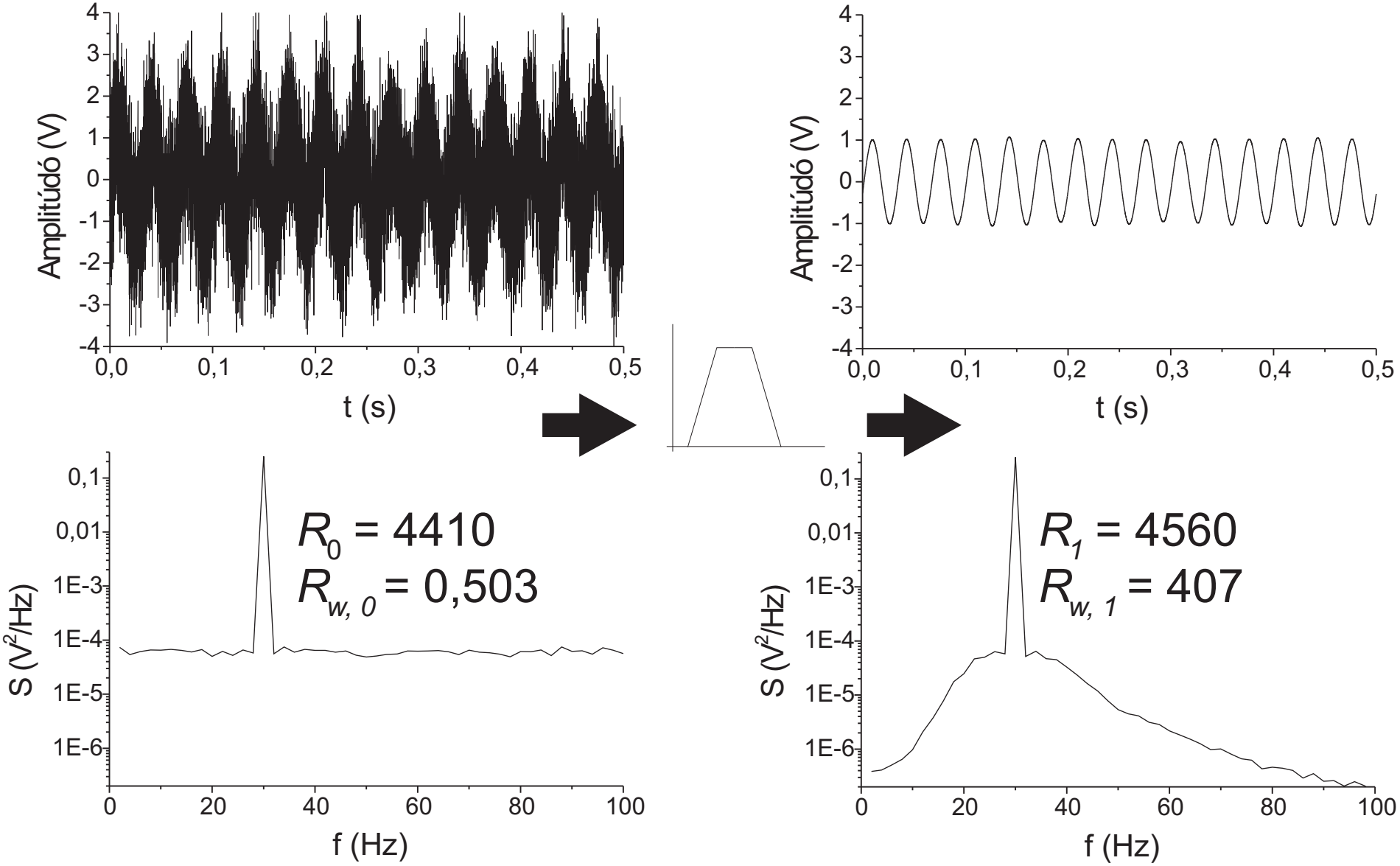
Keskenysávú:

$$R := \frac{\lim\limits_{\Delta f \to 0} \int\limits_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} S_{\text{jel}}(f)\mathrm{d}f}{S_{\text{zaj}}(f_0)}$$

Szélessávú:

$$R_w := \frac{P_{\text{jel}}}{P_{\text{zaj}}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{\Delta f \to 0} \int\limits_{kf_0-\Delta f}^{kf_0+\Delta f} S_{\text{jel}}(f)\mathrm{d}f}{\int\limits_{0}^{\infty} S_{\text{zaj}}(f)\mathrm{d}f}$$

A kétféle definíció sávszűrőn átengedett jelnél



Éghajlatváltozások

- BENZI, R – SUTERA, A – VULPIANI, A: The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A*, vol 14 (1981) L453–L457. p.
- kovamoszat-üledékekben található oxigénizotópok aránya ⇒ jégkorszakok kb 100 000 éves periódussal ismétlődnek ≈ Föld-pálya excentricitásának ingadozásában föllelhető periodicitás
- modell (T a globális átlaghőmérséklet):

$$C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mu(t)P[1-\alpha(T)] - \sigma T^4, \tag{1}$$

ahol C a Föld hőkapacitása, $\mu(t)$ egy a Föld-pálya excentricitását jellemző paraméter, P a Föld felszínét érő napsugárzás átlagos sugárzási teljesítménye, $\alpha(T)$ az átlagos albedó, σ pedig a Föld infravörös sugárzás útján történő hűlését jellemző átlagos renormált Stefan–Boltzmann-állandó.

- az excentricitás 10^5 év periódusidővel változik:

$$\mu(t) = 1 + A\cos(\Omega t) \qquad \left(\Omega := \frac{2\pi}{10^5\ \text{év}}\right). \tag{2}$$

Éghajlatváltozások

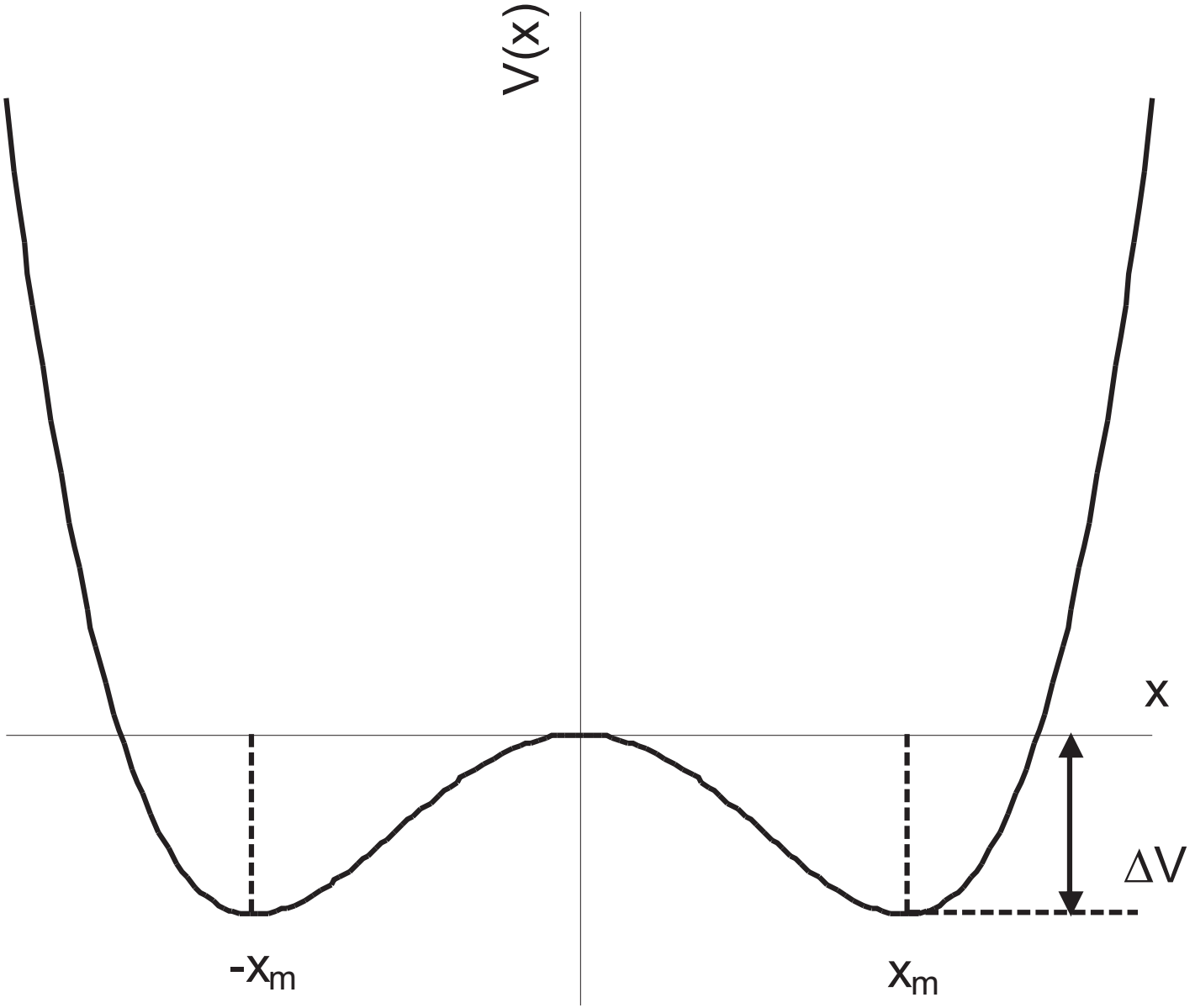
- az (1) egyenlet átírható egy $\phi(T)$ potenciál terében mozgó részecske T koordinátával leírt túlcsillapított mozgásának egyenletével analóg formába:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \phi}{\partial T}, \qquad \phi(T) := \int_0^T \frac{1}{C}\left(-\mu(t)P\left[1-\alpha(\vartheta)\right]+\sigma\vartheta^4\right)\mathrm{d}\vartheta. \tag{3}$$

- stabil egyensúlyi állapotok: $\phi(T)$ minimumhelyei (T_1: jégkorszak., T_2: jégmentes korszak)
- becslések: $\mu(t)$, azaz az excentricitás ingadozása nem elegendő az átmenethez
- $\Rightarrow \xi(t)$: a légköri és az óceáni áramlások fluktuációinak és a véletlenszerű albedóváltozások együttes hatása; fehérzaj
- az új modell:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \phi}{\partial T} + \xi(t), \quad \langle \xi(t)\rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = 2D\delta(\tau), \tag{4}$$

A kettős potenciálvölgy



Általánosított modell

- részecske mozgása erős, sebességfüggő közegellenállás mellett egy negyedfokú $V(x)$ potenciáltérben, ahol

$$V(x) := -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4.$$

- az m tömegű részecskére periodikus gerjesztés és egy $\xi(t)$ fehérzaj hat, a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{\partial}{\partial x}V(x) + A_0\cos(\Omega t) + \xi(t).$$

- egyszerűsítés: stacionáriusnak tekintett mozgás ($\ddot{x} = 0$), skálatranszformációkkal dimenziótlanná tétel $\Rightarrow$ a modell alapegyenlete:

$$\boxed{\dot{x} = x - x^3 + A_0\cos(\Omega t) + \xi(t).}$$

- analóg megoldásoknál a megfelelő integrálegyenlet:

$$x(t) = \int_0^t \left(x - x^3 + A_0\cos(\Omega\vartheta) + \xi(\vartheta)\right) \mathrm{d}\vartheta$$

Megoldások

- „lineáris válasz”-elmélet: amikor a zaj mellett a periodikus gerjesztés kis perturbációnak tekinthető, és a rendszer válasza lineárisként közelíthető; a statisztikus fizika módszereivel
- kétállapotú közelítés: csak azt az információt tartjuk meg, hogy a részecske melyik potenciálvölgyben tartózkodik; a dinamika a $+x_m$ és a $-x_m$ állapotok közötti átmenetek leírására egyszerűsödik
- modellezés:
  - numerikus szimuláció
  - analóg modellezés

A kétállapotú közelítés

- ha $n_\pm(t)$ annak a valószínűsége, hogy a t időpillanatban a részecske a $\pm x_m$ állapotban tartózkodik, és $W_\mp(t)$ a $\pm x_m \to \mp x_m$ átmenet időegységre vonatkoztatott valószínűsége, az alapegyenlet

$$\dot{n}_\pm(t) = -W_\mp(t) n_\pm + W_\pm(t) n_\mp$$

- ennek megoldása asszimptotikus határesetben (a tranziensek elmúltával):

$$E_{\mathrm{as}}[x(t)] := \lim_{t_0 \to -\infty} E[x(t)|x_0,\ t_0] = z(D) \cos\left[\Omega t - \phi(D)\right],$$

ahol D a zaj effektív értéke és

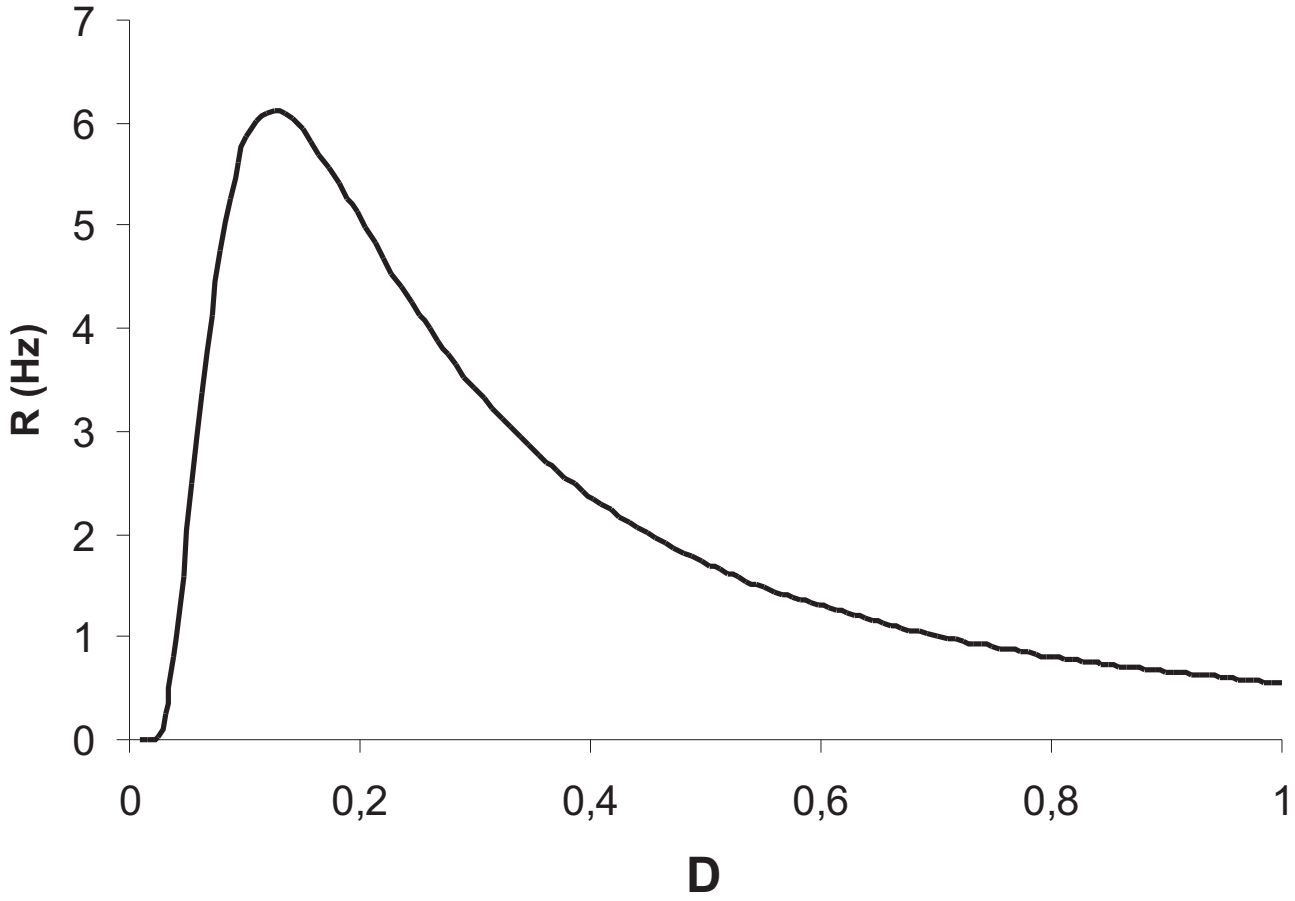
$$z(D) := \frac{A_0 x_m^2}{D} \frac{2r_K}{\sqrt{4r_K^2 + \Omega^2}},$$

$$\phi(D) := \operatorname{arctg}\left(\frac{\Omega}{2r_K}\right)$$

és r_K az ún. *Kramers-ráta*, amely periodikus gerjesztés nélküli esetben leírja a potenciálvölgyek közti átmenetek gyakoriságát:

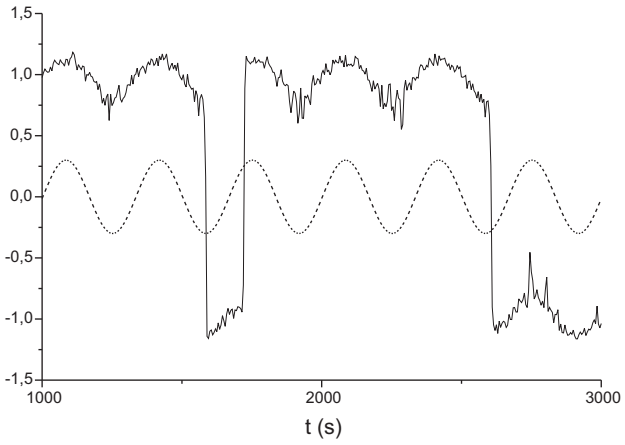
$$r_K = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta V}{D}}.$$

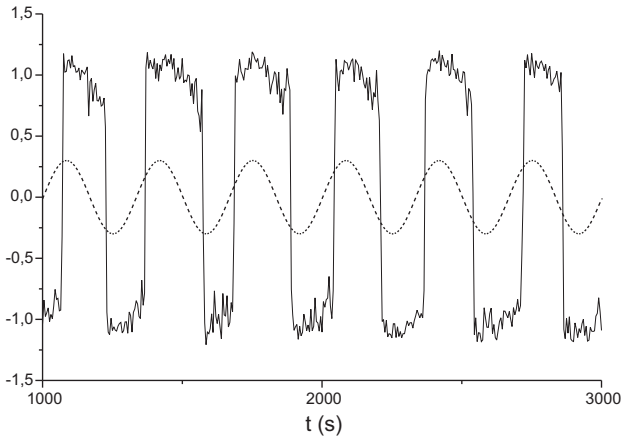
A jel-zaj viszony kétállapotú közelítésben

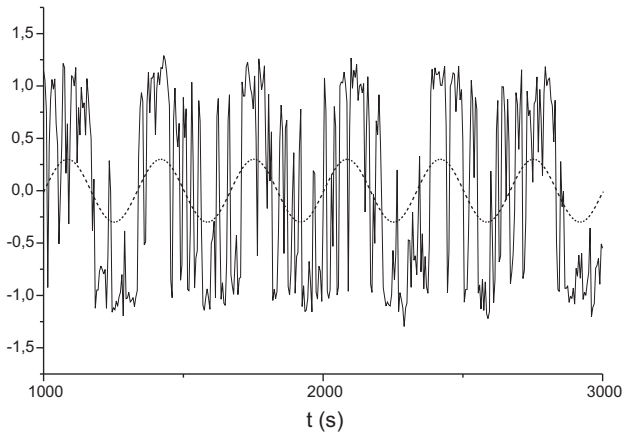


$$R(D) = \pi \left(\frac{A_0 x_m}{D} \right)^2 r_K = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{A_0 x_m}{D} \right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{\Delta V}{D}}$$

Kimeneti jelalakok







Cochlea-implantátumok

Cochlea-beültetés: a külső mikrofon jelét a jelföldolgozó egység elektromos impulzusokká alakítja, amelyeket a csigában *(cochlea)* elhelyezett elektródák továbbítanak

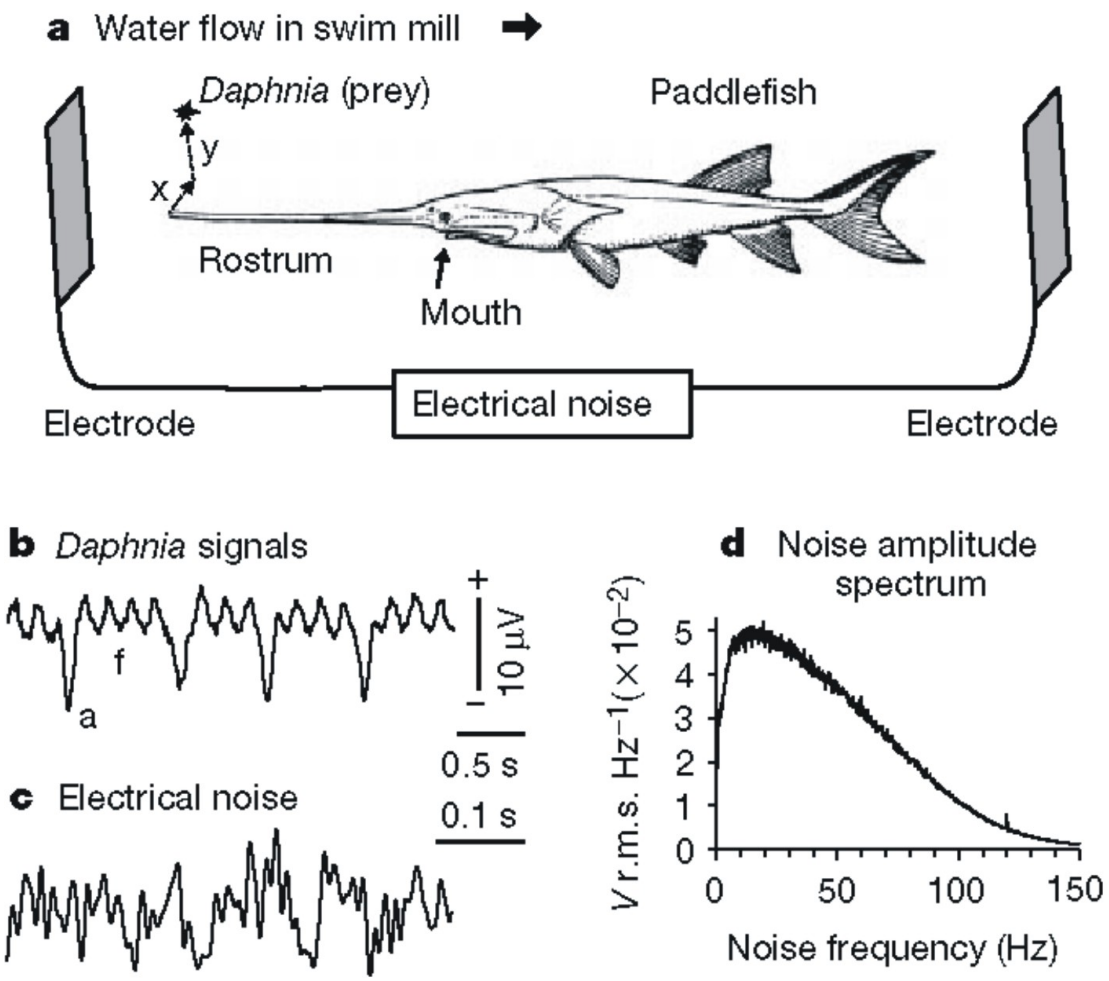
Cochlea-implantátumok

- normális esetben a csigában *(cochlea)* található szőrsejtek a hang hatására mozgásba jönnek, és elektromos impulzusokat adnak le, ezt érzékelik az idegsejtek
- a szőrsejtek hiánya vagy károsodása esetén: beültetés, elektromosan ingerli a hallóideget
- a külső mikrofon jelének kódolása: sokféle – FFT-vel, beszédhangokra jellemző komponensek azonosításával, *&c*
- a beteg továbbra is nehezen hallja a beszédet zajos szobában, vagy a zenét
- **megoldás: zajt keverni a kódolt elektromos jelhez**
- egészséges emberben a szőrsejtek véletlenszerű mozgása, illetve az ingerületátvivők fölszabadulásának véletlenszerűsége része a természetes kódolásnak, a mesterséges zaj ezt pótolja[1]

[1] lásd MONITA CHATTERJEE – MARK E ROBERT, *Journal of the Association for Research in Otolaryngology* **2** (2001), illetve itt

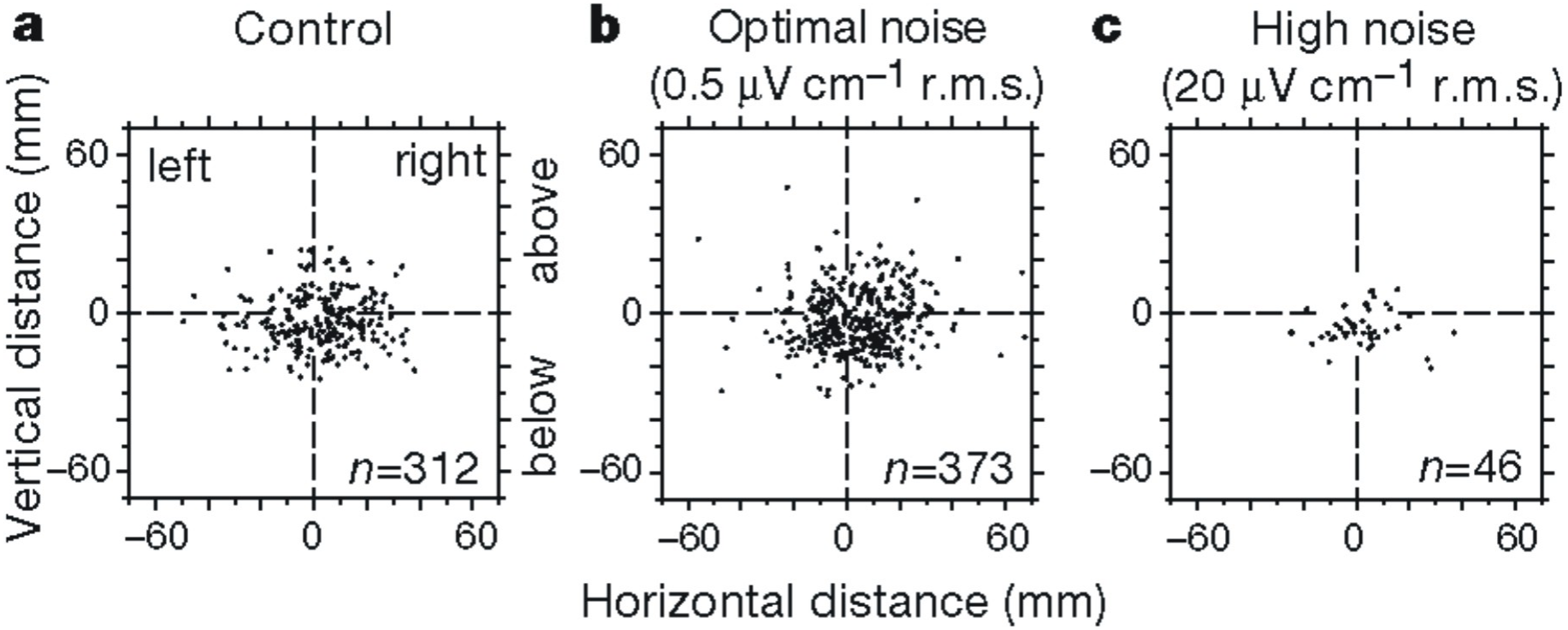
Hogyan vadászik a kanalas tokhal?

D F RUSSELL *&al*, *Nature* **402** (1999)



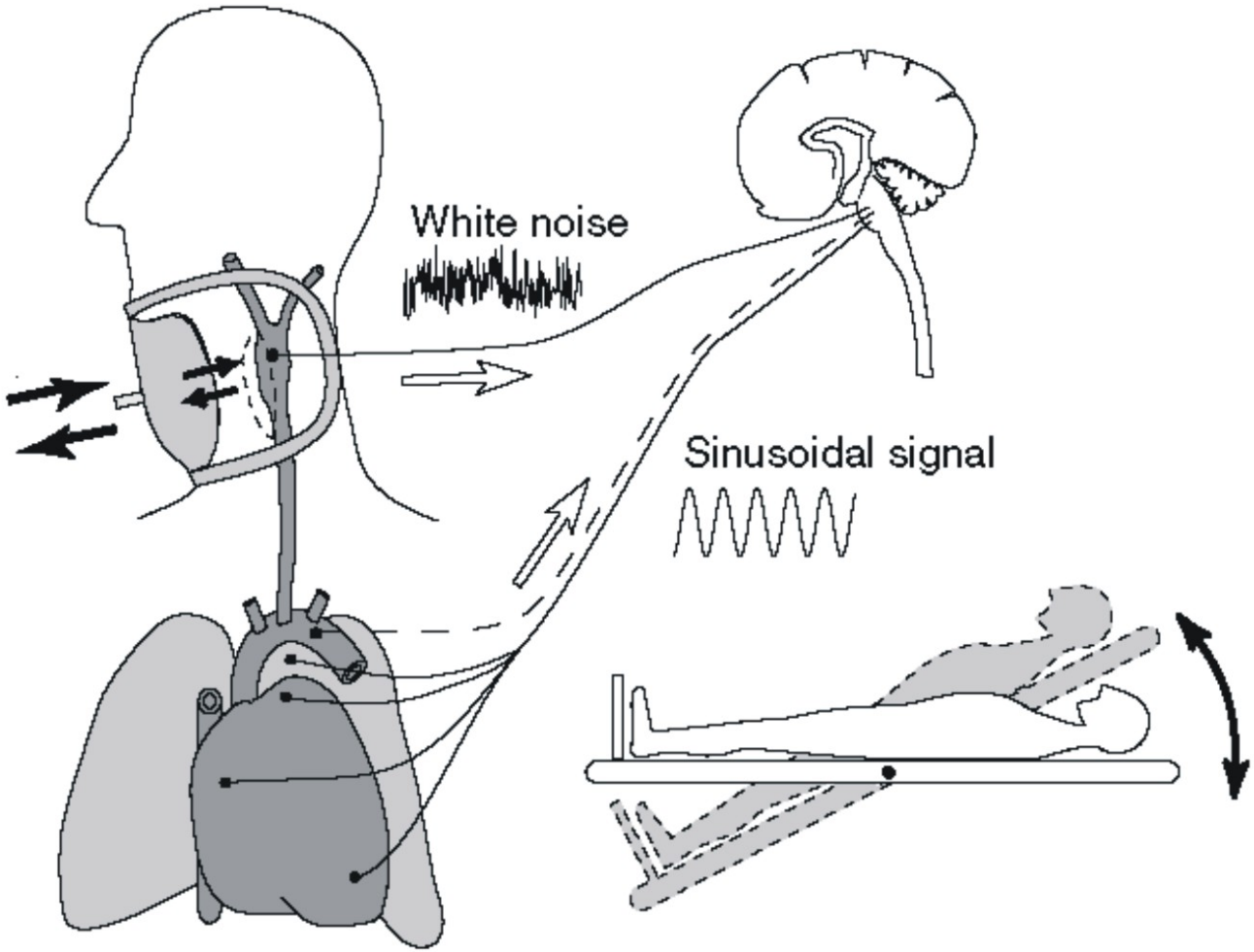
A tokhal „hatáskeresztmetszete”

D F RUSSELL *&al*, *Nature* **402** (1999)



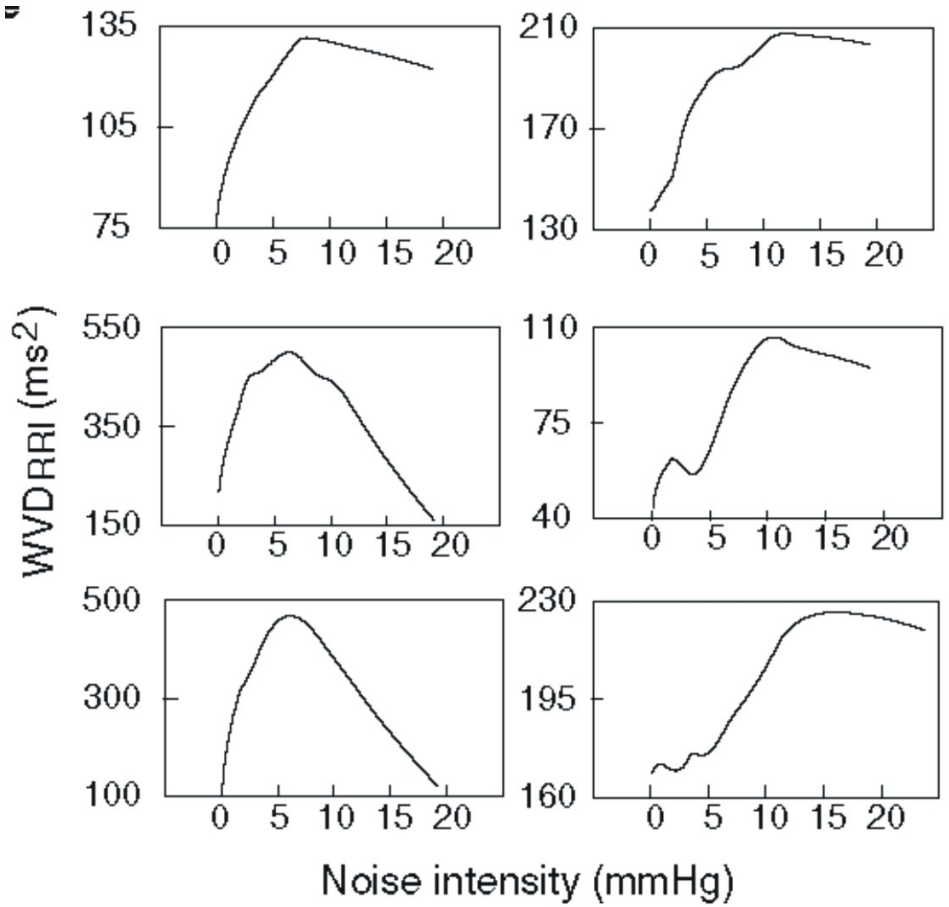
Baroreflexes sztochasztikus rezonancia emberben

HIDAKA *&al*, *Physical Review Letters* **85** (2000)



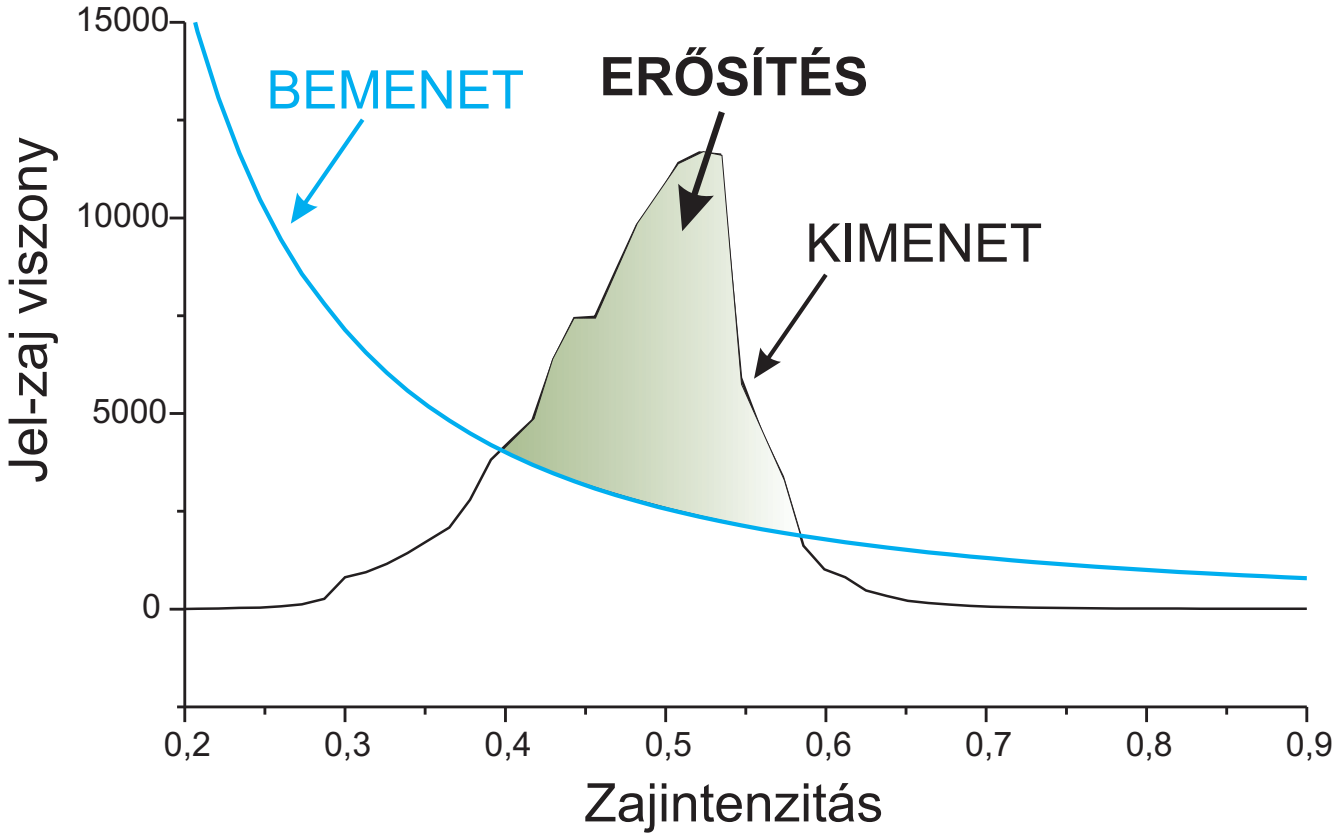
Baroreflexes sztochasztikus rezonancia emberben

HIDAKA *&al*, *Physical Review Letters* **85** (2000)



Jel-zaj viszony erősítés

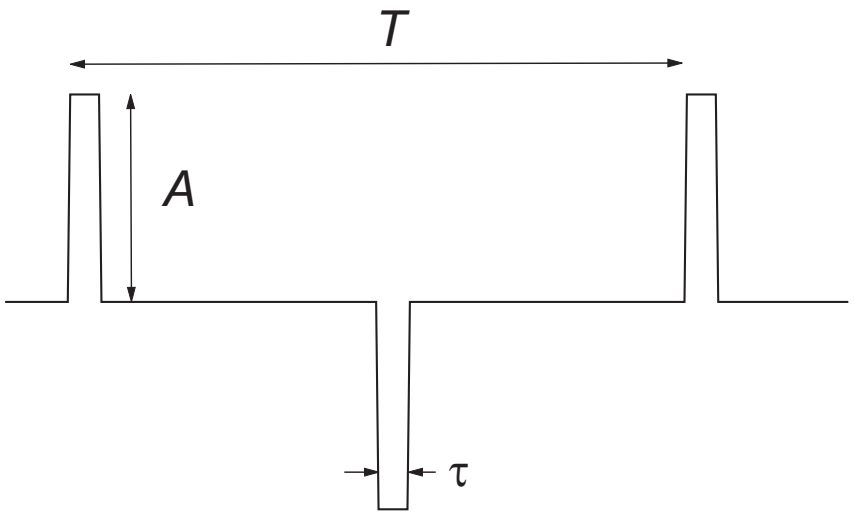
$$R_{\mathrm{ki}} > R_{\mathrm{be}}?$$

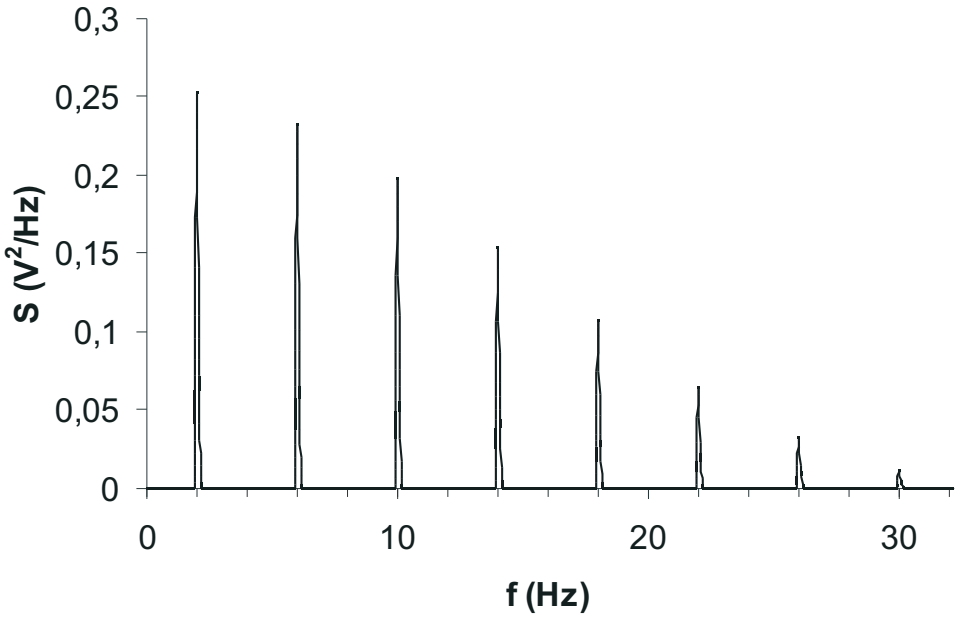


- szűrők: működésük lényege a nagy jel-zaj viszony erősítés
- sztochasztikus rezonancia: a zajszint növelése a zajos bemenő jelhez képest is javítja a kimenő jelet
- jelentősége biológiai rendszerekben lehet, másutt a szűrők jobban teljesítenek

A periodikus bemenőjel és spektruma

A bemenőjel

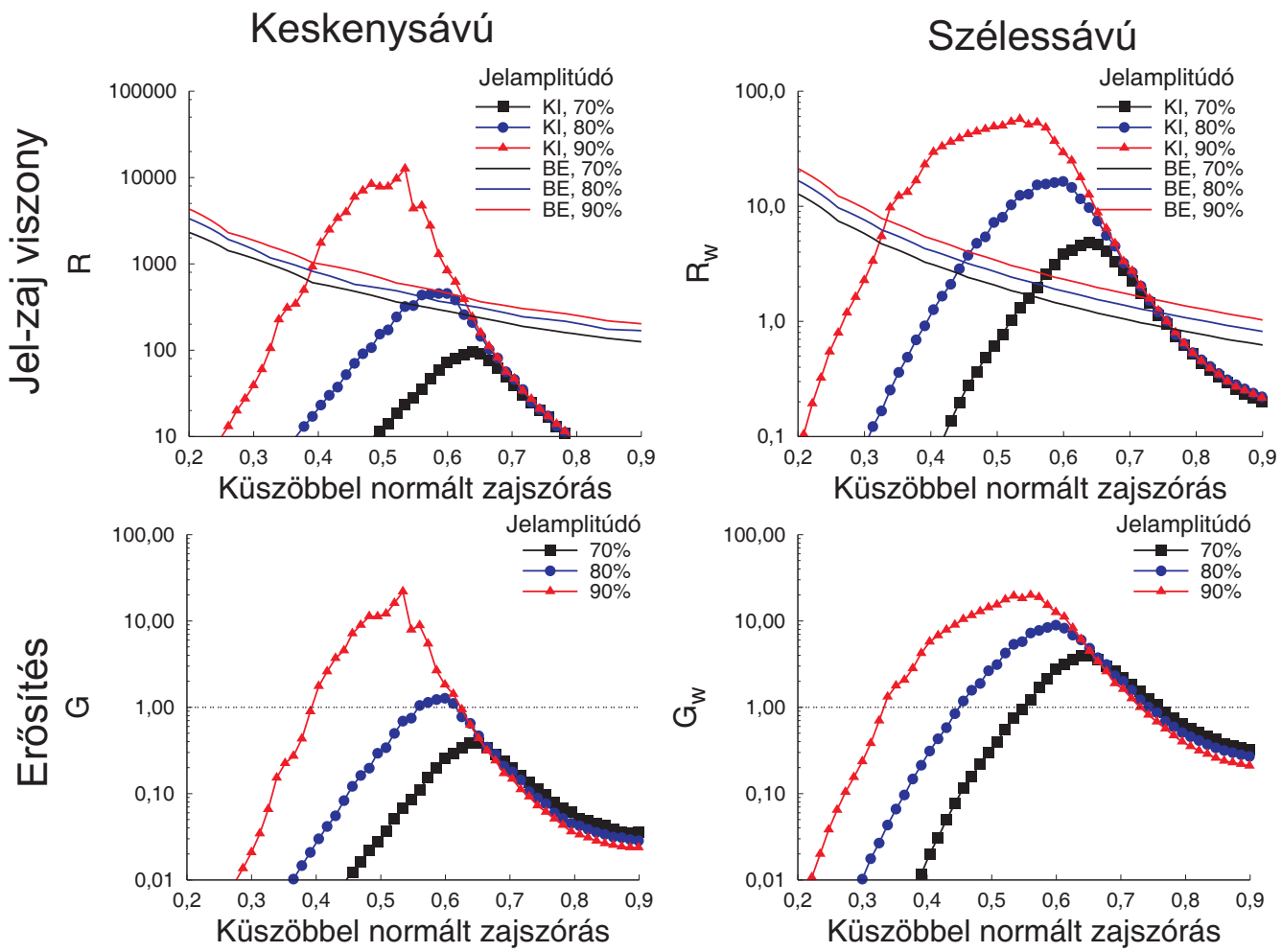




Kitöltési tényező: $\theta = \frac{2\tau}{T} \cdot 100\%$

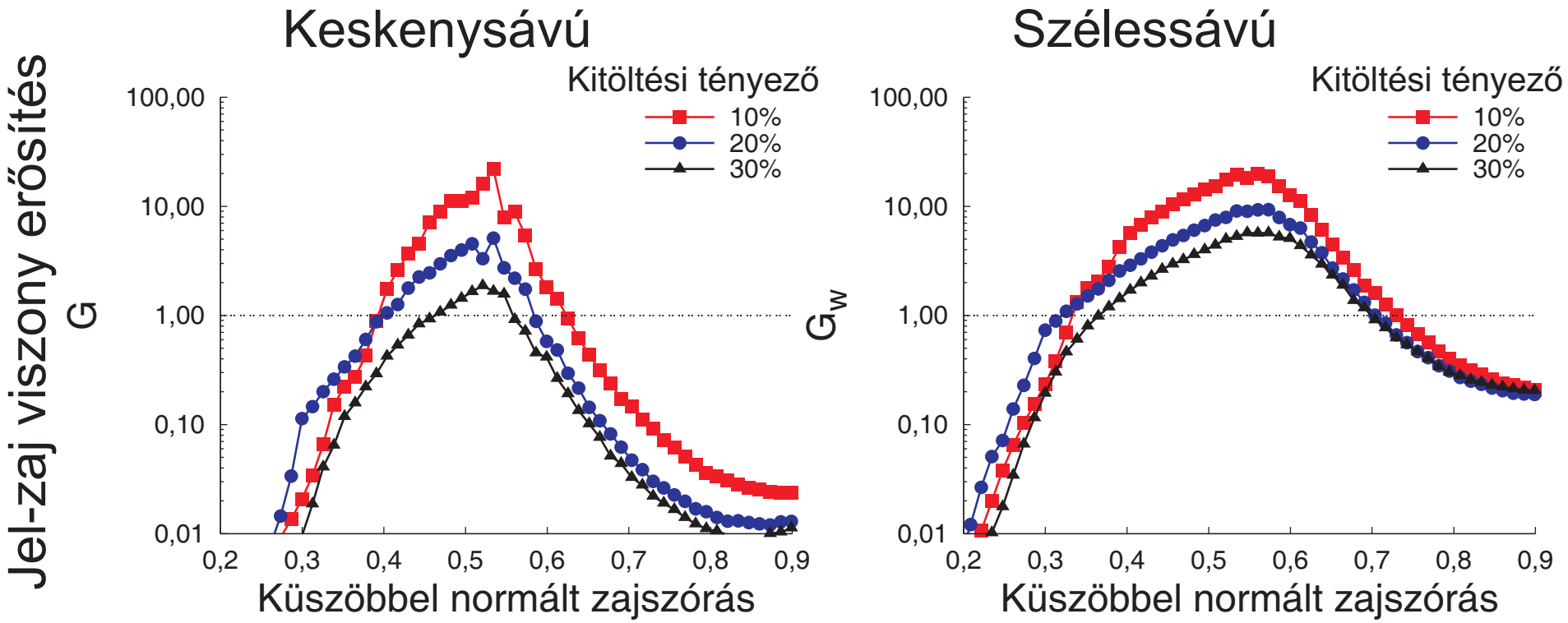
Jelentőség: a technikai alkalmazásokban, idegi jelenségekben előforduló jelek impulzusszerűek

Eredmények: az amplitúdó szerepe



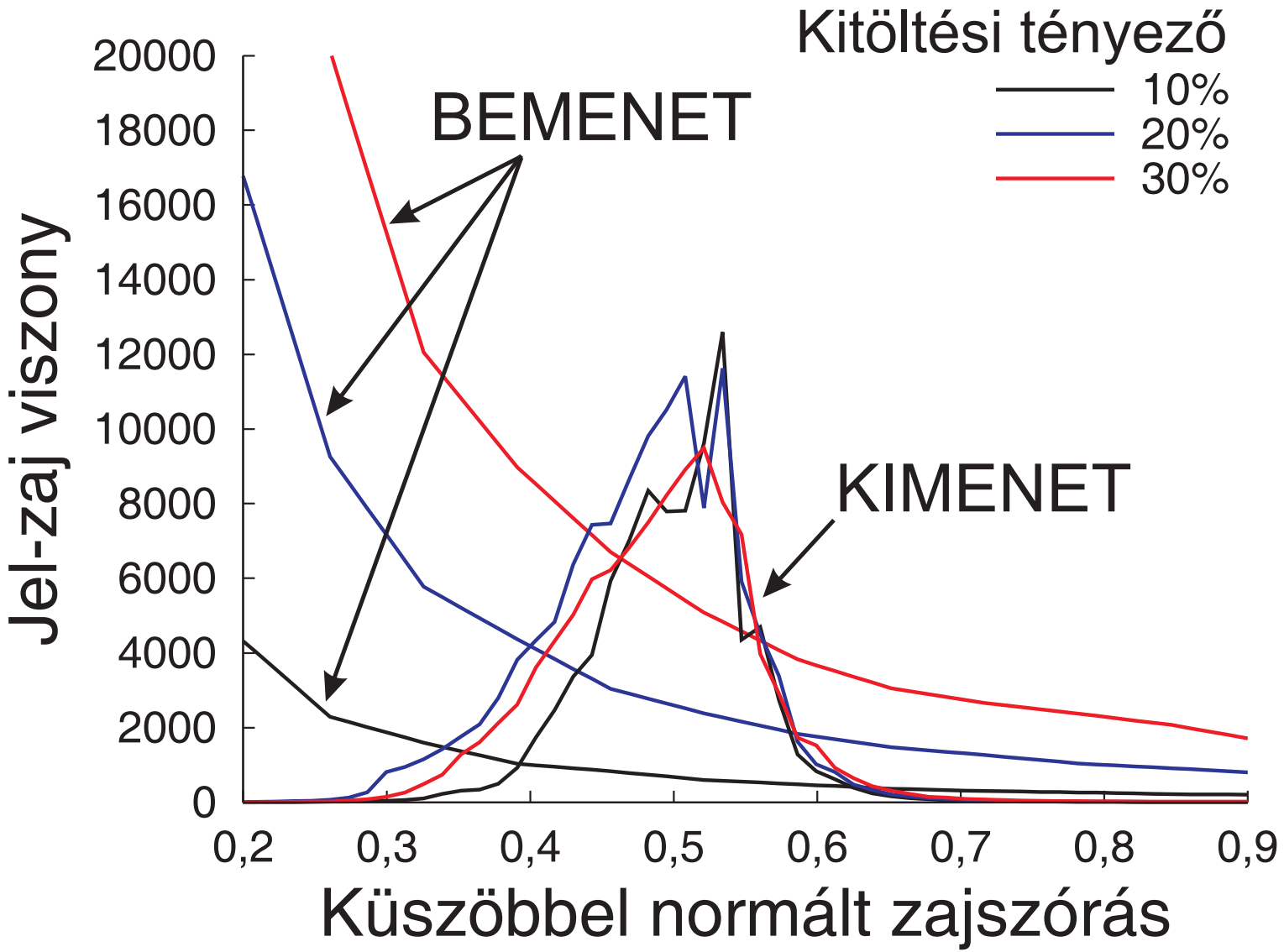
Növekvő amplitúdók (erősödő nemlinearitás) ⇒ növekvő erősítés.

Eredmények: a kitöltési tényező szerepe



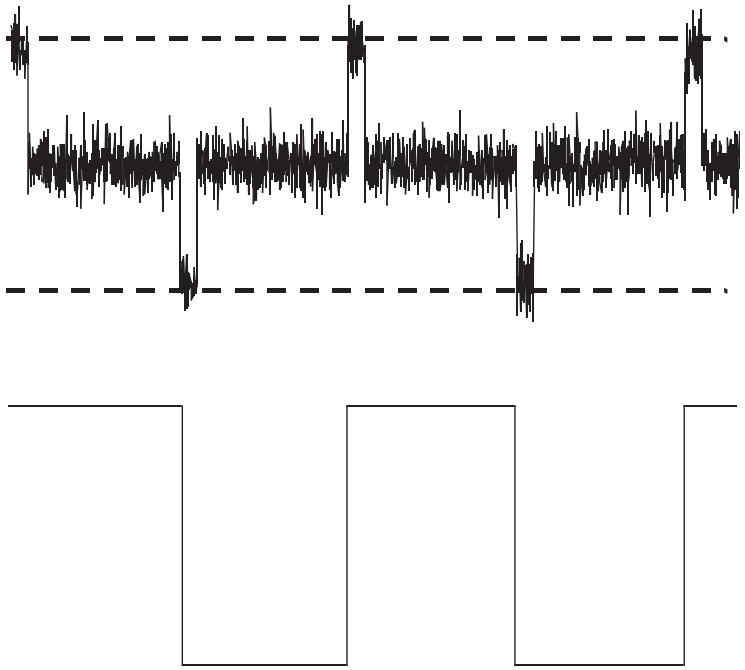
Keskeny impulzusok ⇒ növekvő erősítés.

Miért a kis kitöltési tényező jó?



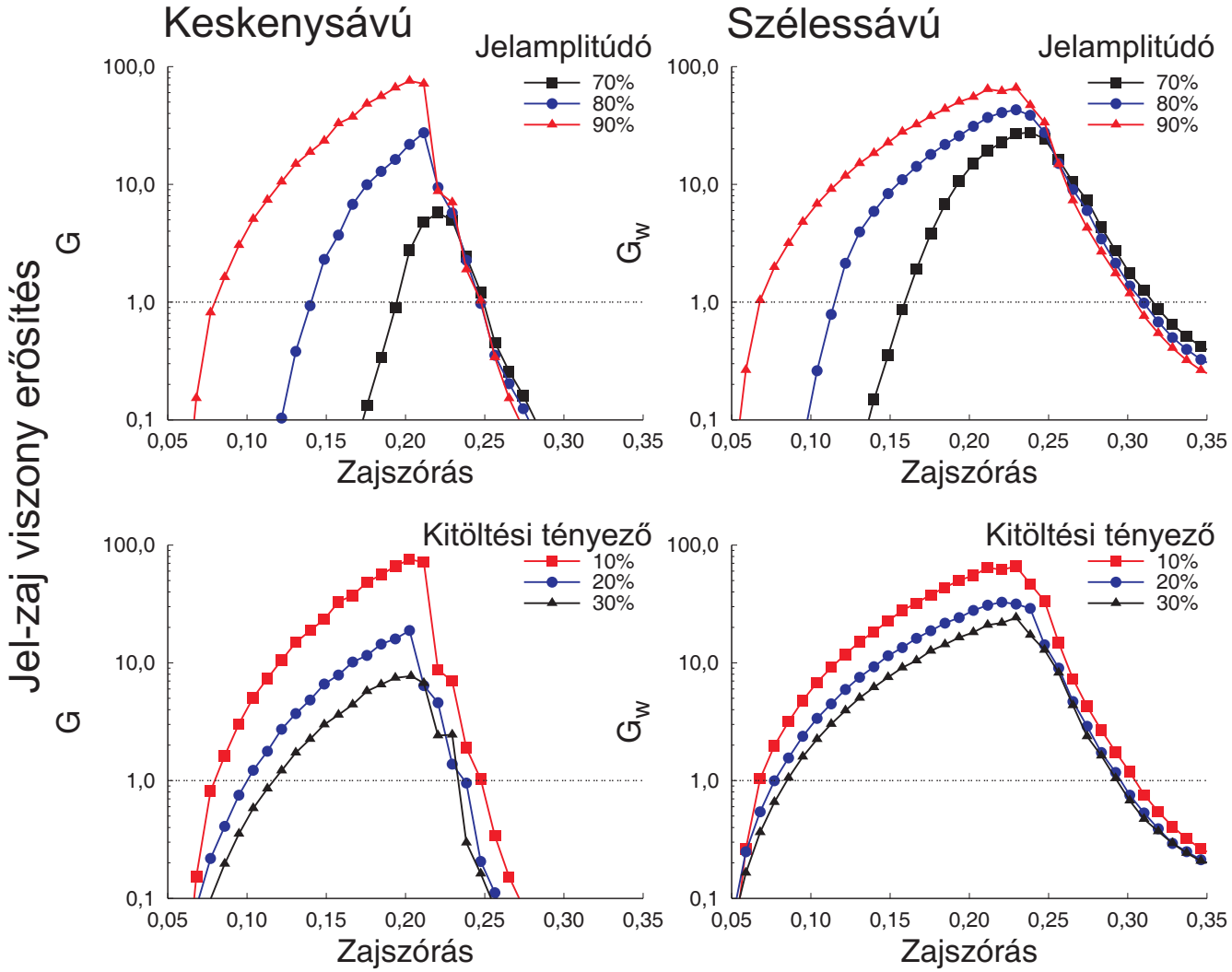
Összehasonlítás: Schmitt-trigger

- kettős potenciálvölgy: dinamikai rendszer
- véges válaszidő ⇒ egyfajta szűrés a ***kimeneten***
- ez-e a jeljavítás oka?
- eldöntés: összehasonlítás egy nemdinamikai rendszerrel, a Schmitt-triggerrel (hiszterézises komparátor)



Módszer: *numerikus szimuláció*

Schmitt-trigger: eredmények

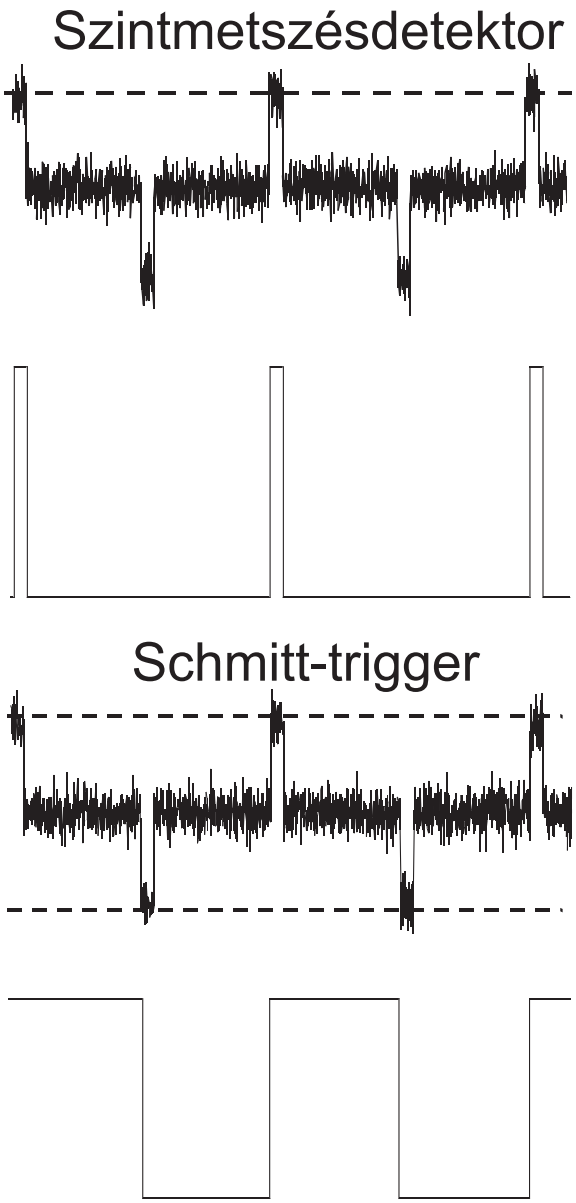


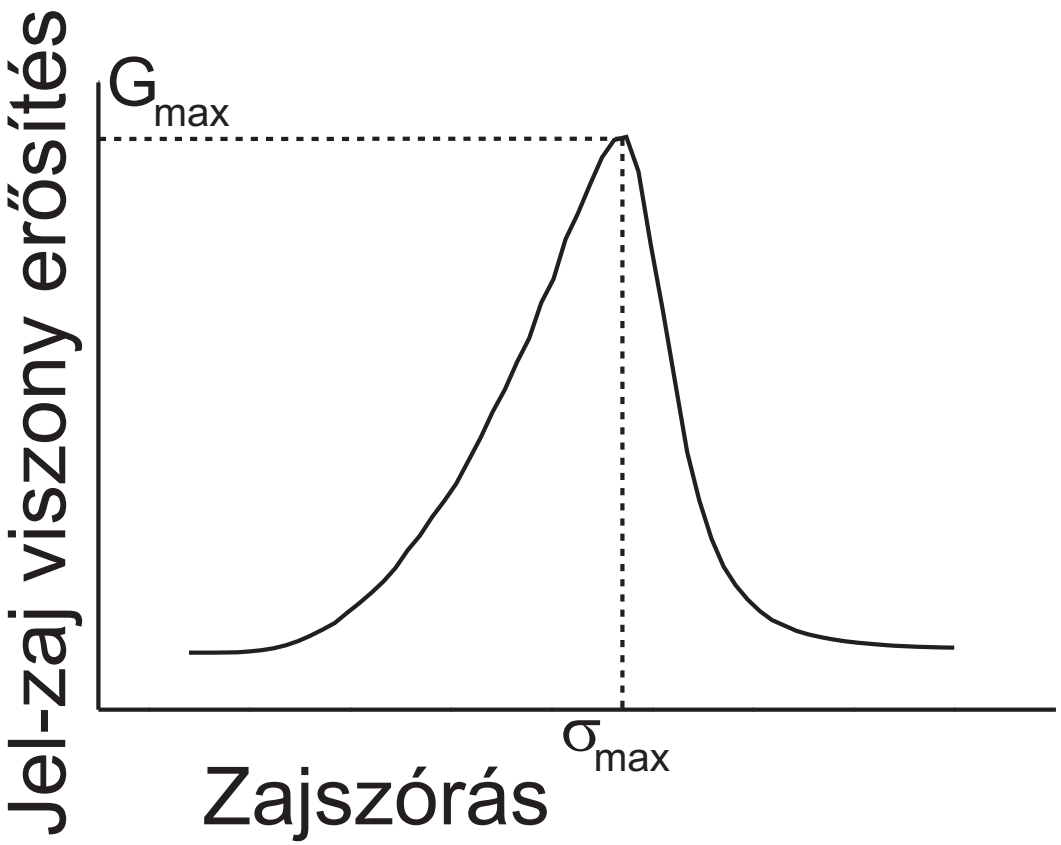
Hasonló a kettős potenciálvölgyhöz ⇒ ***nem a dinamika a döntő***

Színes zajú gerjesztések

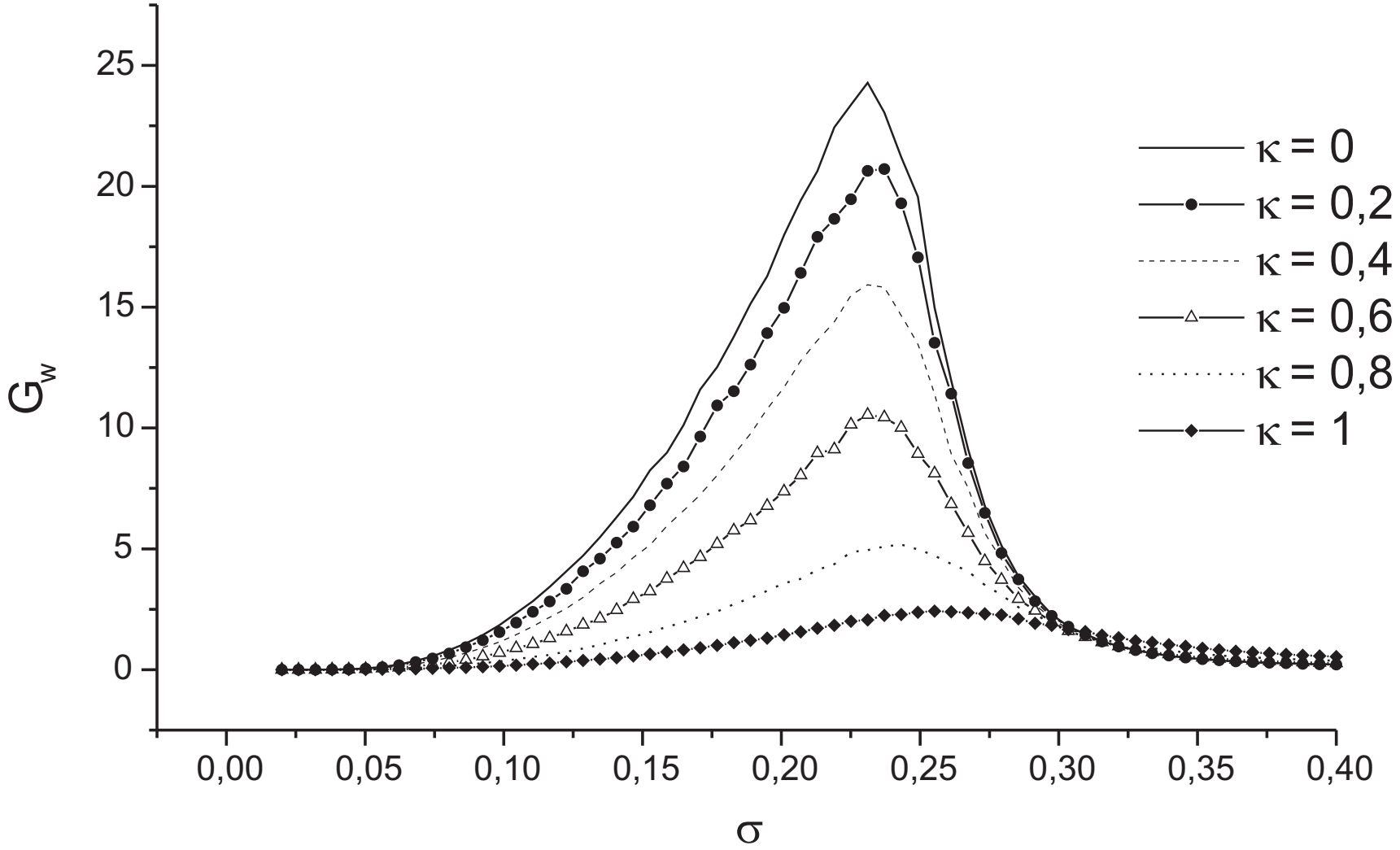
- a legtöbb vizsgálat: fehérzajjal
- ok: egyszerűbb elméleti kezelés
- a színes zajok jelentősége: igen elterjedtek valós rendszerekben
- a sztochasztikus rezonanciában legtöbbször lerontják a jel-zaj viszony értékét
- az optimalizáció lehetősége: egy neuronmodellben kisebb zajintenzitás elegendő a maximum eléréséhez (Nozaki *&al*, 1998)
- a színes zajok hatása a jel-zaj viszony *erősítésre?*

A vizsgált modellek és paraméterek



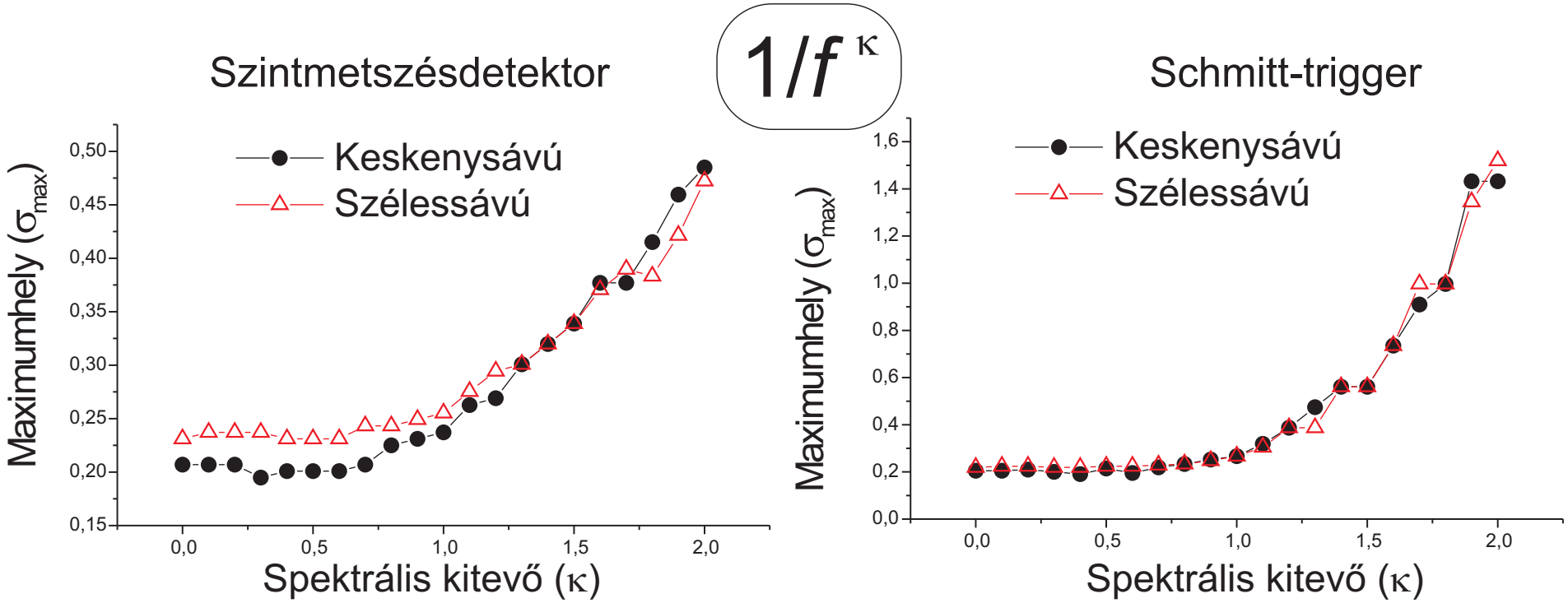


Eredmények: a színes zajok hatása



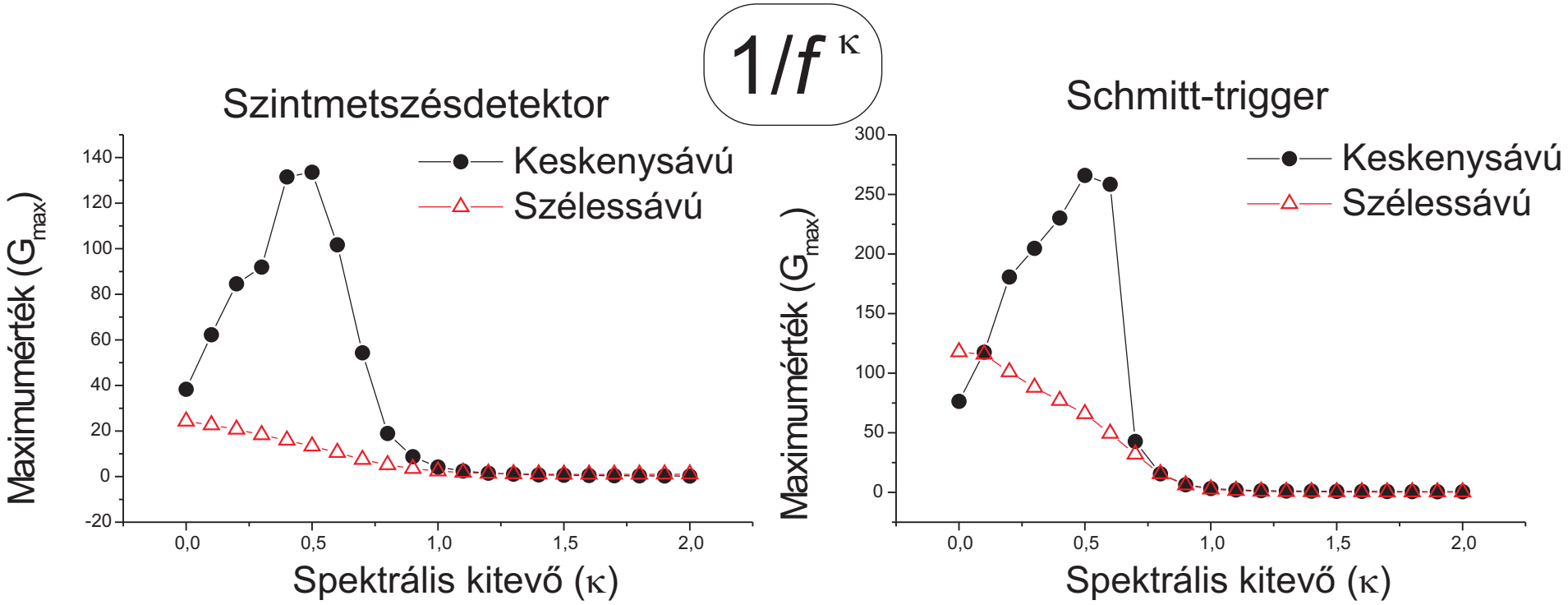
A szélessávú jel-zaj viszony erősítés különböző, $1/f^{\kappa}$ spektrális összefüggéssel jellemezhető színes zajokra

Eredmények: maximumhely



Nincs optimalizáció

Eredmények: maximumérték



A keskenysávú jel-zaj viszony erősítést a színes zajok optimalizálják

A keskenysávú jel-zaj viszony erősítés

- a bemeneti zaj spektrumának alakja: $S_{\text{zaj, be}}(f) = \frac{C(\sigma,\kappa)}{f^\kappa}$, ahol σ a zajszórás
- Parseval-tétel: az „összteljesítmény" (integrált amplitúdónégyzet) ugyanannyi időtartományban, mint frekvenciatartományban

$$\sigma^2 = \int_0^{f_{\max}} S_{\text{zaj, be}}(f)\mathrm{d}f \quad \Rightarrow \quad C(\sigma,\kappa) = \sigma^2 \left(\int_0^{f_{\max}} \frac{1}{f^\kappa}\mathrm{d}f \right)^{-1} = \sigma^2 \frac{1-\kappa}{f_{\max}^{1-\kappa}} \qquad (0 \le \kappa < 1)$$

- így a zaj teljesítménysűrűség-spektruma a bemeneten:

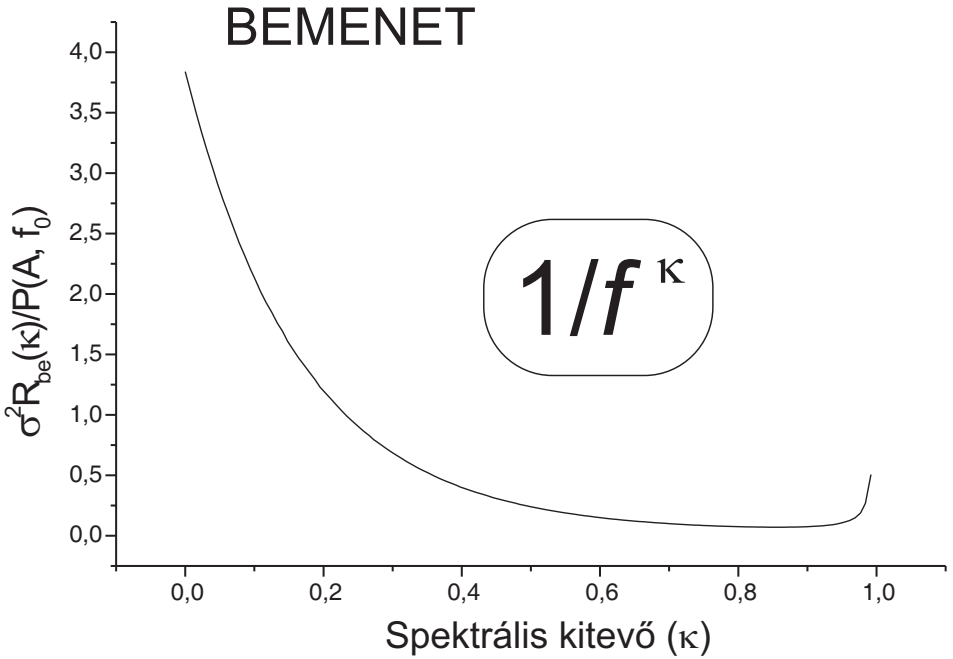
$$S_{\text{zaj, be}}(f) = \sigma^2 \frac{1-\kappa}{f_{\max}^{1-\kappa} \cdot f^\kappa} \qquad (0 \le \kappa < 1)$$

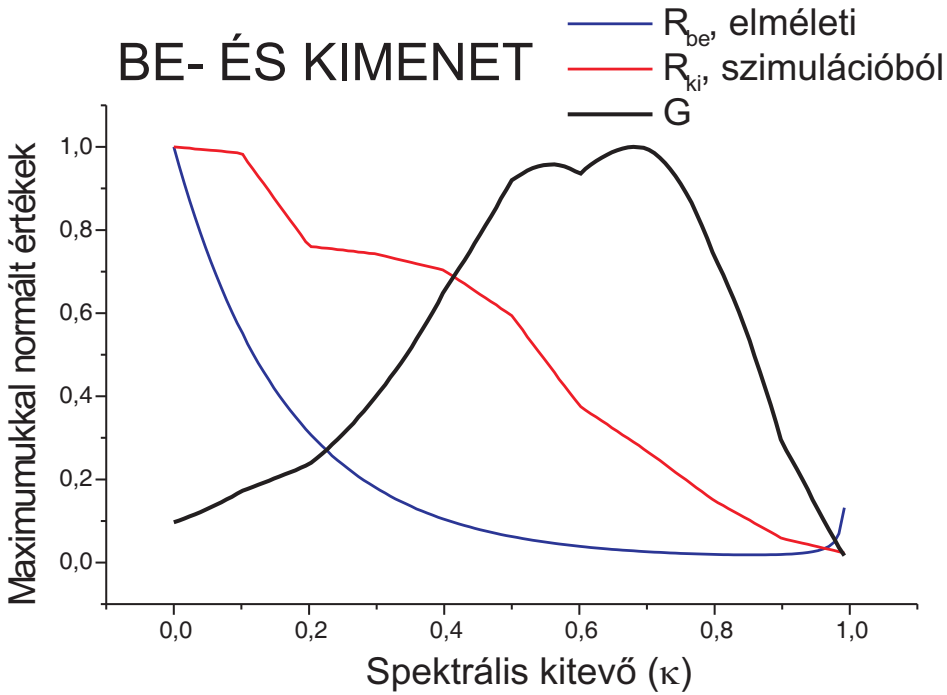
- ebből megkaphatjuk a bemeneti jel-zaj viszonyt:

$$R_{\text{be}}(\kappa,\sigma) = \frac{\lim\limits_{\Delta f \to 0} \int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} S_{\text{jel, be}}(f)\mathrm{d}f}{S_{\text{zaj, be}}(f_0)} = P(A,f_0)\frac{f_{\max}^{1-\kappa} f_0^\kappa}{\sigma^2(1-\kappa)} \qquad (0 \le \kappa < 1),$$

ahol $P(A,f_0)$ a bemenőjel teljesítménye az alapfrekvencia közvetlen környezetében

A keskenysávú jel-zaj viszony erősítés





$$R_{\mathrm{be}}(\kappa,\sigma) = P(A,f_0)\frac{f_{\max}^{1-\kappa} f_0^{\kappa}}{\sigma^2(1-\kappa)} \qquad (0 \le \kappa < 1)$$

$$\kappa_{\mathrm{ext}} = 1 + \frac{1}{\ln \frac{f_0}{f_{\max}}}$$