DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA ANALÓG SZÁMÍTÓGÉPPEL

Az analóg áramkörök körében léteznek olyan eszközök, amelyek képesek matematikai műveletek elvégzésére. A matematikai változókat áram vagy feszültség reprezentálja, míg a műveletet elvégzését egy adott elektronikai kapcsolás biztosítja.

Hogyan képesek az analóg áramkörök matematikai műveletek elvégzésére? Mivel ezeknek az eszközöknek a működését is matematikai módszerekkel írjuk le, nyilvánvaló, hogy minden kapcsolás matematikai összefüggéseknek, egyenleteknek felel meg. Az analóg elektronika nagy előnye, hogy viszonylag egyszerűen igen sokféle kapcsolás kialakítható és így sokféle egyenlet reprezentálható. Az egyes egyenleteket realizáló és megoldó áramköröket analóg számítógépeknek nevezzük.

A műveletek elvégzését passzív (ellenállás, kondenzátor, dióda, stb.) és aktív áramköri elemek (tranzisztorok, erősítők) végzik. Az egyik leghatékonyabb eszköz a műveleti erősítő, melynek felhasználásával könnyen megvalósítható áramok és feszültségek összegzése, kivonása, számmal való szorzása, integrálás, differenciálás, logaritmálás, stb. Léteznek ezenkívül analóg szorzó áramkörök is, amelyekkel két feszültség szorzatát képezik, függvénygenerátorok, amelyekkel speciális időfüggő mennyiségek állíthatók elő. Fontos még megemlítenünk az A/D és D/A konvertereket, amelyek segítségével a feszültségek digitális-analóg átalakítása végezhető el, így a kapcsolásba és mérésbe digitális elemeket, számítógépet is bevonhatunk.

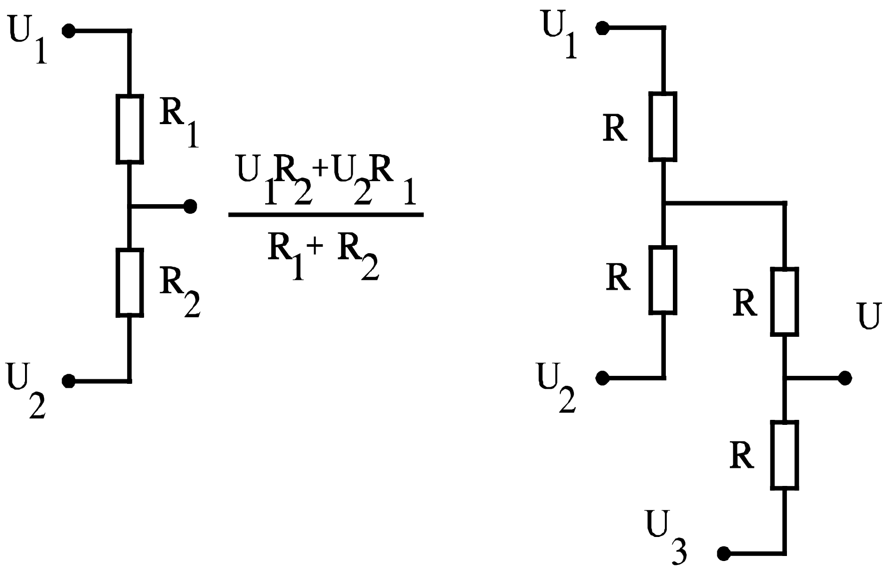
Az alkalmazási korlátokat elsősorban az egyes áramkörökkel elérhető pontosság jelenti. A felhasználáskor tudnunk kell azt is, hogy a műveletek nem végezhetők el bármilyen nagyságú feszültségeken, a feszültségtartomány korlátozott (elsősorban az aktív elemek tápfeszültsége miatt). Ha ezt a tartományt túllépjük, hamis eredményt kapunk. Hasonlóképpen a jel időbeli változásának is egy bizonyos korlát alatt kell maradnia, mivel az áramköri elemek nem képesek tetszőlegesen gyors jelek pontos feldolgozására.

A következőkben néhány alapvető művelet realizálását tekintjük át.

1.1. Feszültségek összegzése és kivonása

A legegyszerűbb eszköz feszültségek súlyozott összegének előállítására a két ellenállásból álló ellenállásosztó. Ez az elem az U_1,U_2 feszültségekből a következő feszültséget állítja elő

$$U = \frac{R_1 U_2 + R_2 U_1}{R_1 + R_2} \qquad \textbf{(1)}$$



A kapcsolás hátránya, hogy az összeg feszültég mindenképpen a két bemenő feszültség közé esik, így tehát az tényleges összegnek csak egy konstansal való szorzatát kaphatjuk meg. R_1=R_2 esetén például

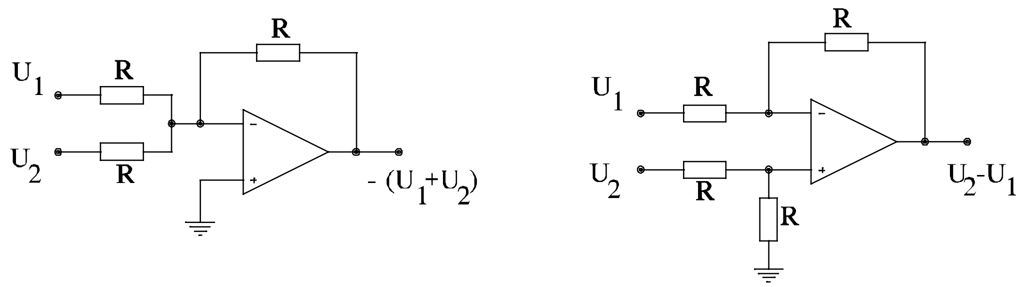
A másik hátrány, hogy az így kapott feszültséget ujabb

$$U = \frac{U_2 + U_1}{2} \qquad (2)$$

ellenállásosztóba vezetve a második osztó befolyásolja az első működését.

Ezeket a hátrányokat csak aktív áramköri elemekkel, erŐsítŐkkel küszöbölhetjük ki. Az aktív szó éppen arra utal, hogy a bemenő feszültséget (pontosabban teljesítményt) megnövelhetjük. Az energiamegmaradás törvénye szerint ehhez természetesen szükség van egy energiaforrásra is, ezért az aktív áramköri elemek külső tápfeszültséget igényelnek.

A műveleti erősítő felhasználásával két feszültség összegzését és kivonását a 2.ábrán látható módón végezhetjük el. A kapcsolás egyszerűen kiegészíthető több feszültség összegzésére is.

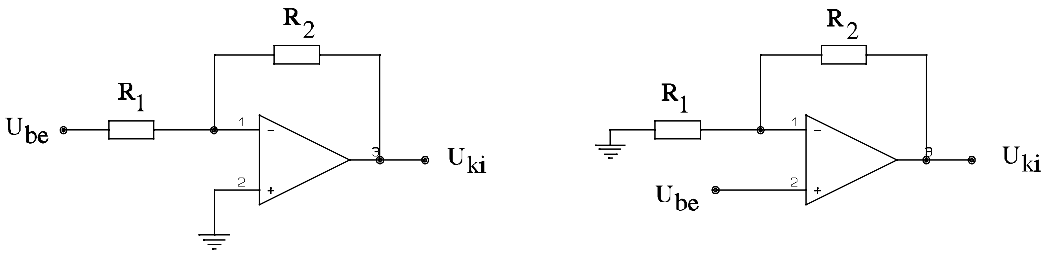


1.2. Feszültség szorzása számmal

Ha az (1) egyenletben az U_2 feszültséget nullának választjuk, akkor láthatjuk, hogy az ellenállásosztó alkalmas a bemenő U_1 feszültség 0 és 1 közé eső számmal való szorzására

$$U = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (3)$$

Most is igaz, hogy ha 0-nál kisebb vagy 1-nél nagyobb számmal akarunk szorozni, akkor műveleti erősítőt célszerű alkalmaznunk. Két alapvető kapcsolás látható a 3.ábrán.



$$U_{ki} = -\frac{R_2}{R_1} U_{be} \qquad\qquad U_{ki} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{be}$$

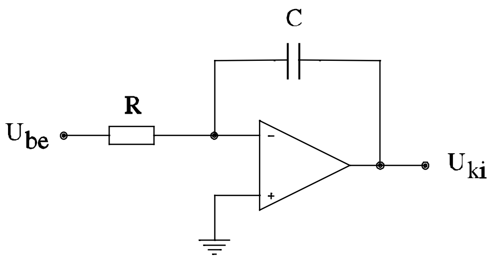
1.3. Feszültségek szorzása

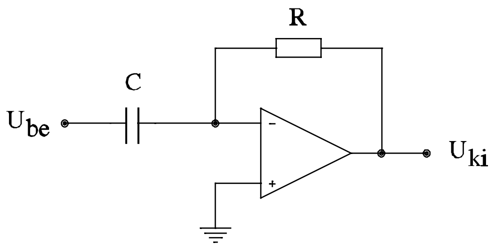
Két feszültség szorzását célszerűen az integrált formában beszerezhető analóg szorzó áramkörökkel végezhetjük el. Ez az áramkör lényegesen bonyolutabb elven működik, mint az eddig tárgyalt áramkörök. Az analóg szorzó áramköri jelölése az 6.ábrán látható. A szorzó áramkör fontos eleme az analóg áramkörökkel való modellezésnek, felhasználásával készíthető hatványozó, osztó, gyökvonó áramkör is [].

1.4. Feszültségek differenciálása és integrálása

Fizikai jelenségek modellezésében nagyon fontos a feszültségek idő szerinti differenciálhányadosának és integráljának a képzése. Ezeket a feladatokat műveleti erősítő felhasználásával viszonylag egyszerűen elvégezhetjük.

A differenciáló és integráló kapcsolás legegyszerűbb változata látható a 4.ábrán. Az analóg áramköri modellezésben az integrálás a fontosabb, mert az integráló kapcsolás elektronikailag stabilabb, pontosabb a differenciálónál. Emiatt





$$U_{ki}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t U_{be}(t)\,dt + U_{ki}(0) \qquad\qquad U_{ki}(t) = -RC\frac{dU_{be}(t)}{dt}$$

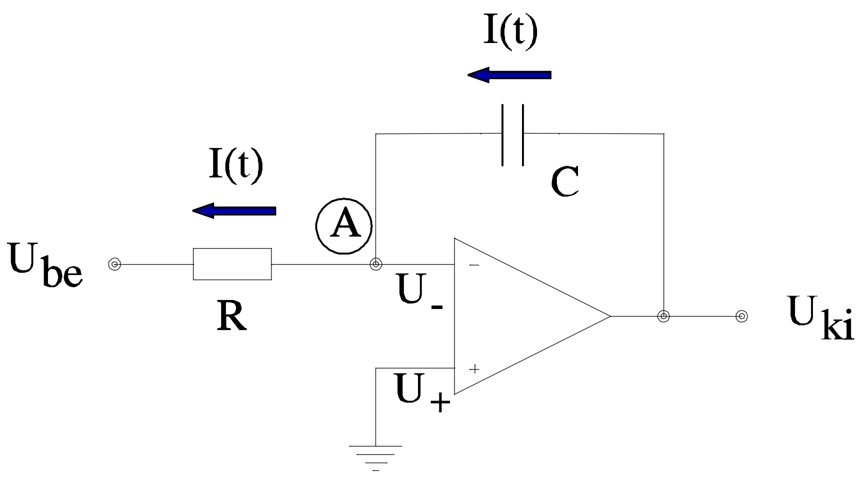
a differenciálásokat lehetőség szerint integrálásokká célszerű átalakítanunk (például differenciálegyenleteket integrálegyenletekké).

Nézzük meg egy kicsit részletesebben az integráló kapcsolás (más néven integrátor) működését a 5.ábra alapján. A műveleti erősítő két alapvető tulajdonságát használjuk fel a kapcsolás elemzéséhez. Az egyik, hogy ***a bemenetekbe nem folyhat áram*** (gyakorlatban igen kicsiny áram folyik csak, típustól függően kb. pA-től µA-ig). Másrészt az U_{ki} kimeneti feszültség a bemeneteken levő U_+ és U_- feszültségektől az alábbi módon függ

$$U_{ki} = A_o(U_+ - U_-) \qquad \textbf{(4)}$$

ahol az A_o nyílthurkú erősítés igen nagy érték, 10^5-10^7 nagyságrendbe esik. Ez azt is jelenti, hogy normális működés esetén U_+ és U_- gyakorlatilag egyenlő, pontosabban csak $U_{ki}/A_o \approx U_{ki}/10^5$ értékkel térnek el egymástól. U_{ki} a gyakorlatban általában a ±10 Volt tartományba esik.

Ezeket a tulajdonságokat felhasználva egyszerűen kiszámítható az intergrátor kimeneti feszültsége a bemeneti feszültség ismeretében. Az R ellenálláson és a C kondenzátoron azonos I áram folyik, mivel az A jelű pontból a műveleti erősítő bemenetébe nem folyhat áram. Mivel $U_+ \approx U_- = 0$, ezért az áramra a



következő kifejezést kapjuk

$$I(t) = \frac{U_{be}(t)}{R} \quad \textbf{(5)}$$

Mivel ez megegyezik a C kondenzátoron átfolyó árammal, kiszámíthatjuk a kondenzátoron eső U_c feszültséget is. Ha a kondenzátoron a t=0 időpillanatban U_{co} feszültség volt, akkor mivel t idő elteltével az átfolyó áram

$$\Delta Q(t) = \int_0^t I(t)\,dt \quad \textbf{(6)}$$

töltést halmozott fel rajta, így az U_c feszültségre

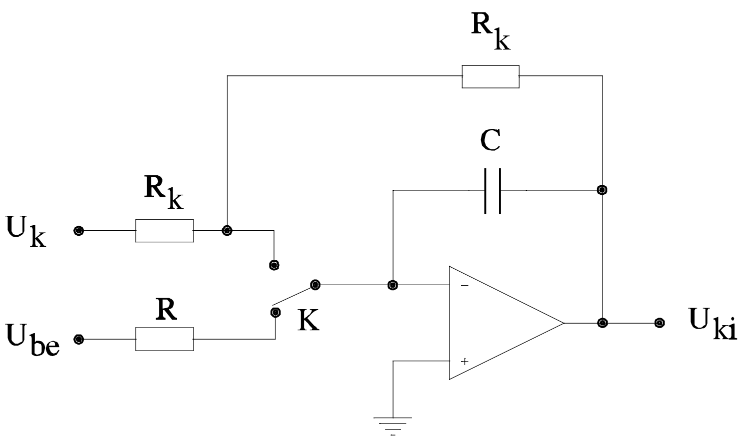
$$U_c(t) = U_{co} + \frac{\Delta Q(t)}{C} = U_{co} + \frac{\int_0^t I(t)\,dt}{C} \quad \textbf{(7)}$$

Felhasználva (5)-öt, és azt, hogy $U_{ki}=U_+-U_c\approx -U_c$

ahol $U_{ki}(0)=-U_{co}$.

$$U_{ki}(t) = U_{ki}(0) - \frac{1}{RC}\int_0^t U_{be}(t)\,dt \qquad \textbf{(8)}$$

Az integrálás kezdeti feltételét úgy állíthatjuk be, hogy a kondenzátort a kívánt $U_{ki}(0)$ feszültség (-1)-szeresére töltjük fel. Ehhez a kapcsolást ki kell egészítenünk néhány elemmel. Ezenkívül célszerű még a kapcsolást úgy módosítani, hogy az integrálás kezdetét vezérelhessük. Ilyen kapcsolást mutat a 6.ábra. Ha a K kapcsoló a felső állásban van, akkor a kimeneti feszültség néhányszor R_kC idő alatt a $-U_o$ értékre áll be (ez lesz egyben a kezdeti feszültség), ha K az alsó állapotba kerül, akkor megkezdődik az integrálás, és egészen K nyitásáig tart.



2. Differenciálegyenletek megoldása

Eddig láthattuk, hogy áramkörökkel matematikai műveleteket végezhetünk el. Használhatnánk ezeket az áramköröket elemi mennyiségek, összegek, sorzatok , stb kiszámítására, de erre a célra sokkal alkalmasabbak a kalkulátorok és mikroszámítógépek nagyobb pontosságuk és értéktartományuk miatt.

Az analóg műveletvégző áramköröket elsősorban fizikai jelenségek modellezésére, differenciálegyenletek megoldására célszerű használni. Ezeket a feladatokat digitális számítógépekkel is megoldhatjuk, de az analóg számítógépek esetében a jeleket nem kell digitalizálni, diszkrét lépésekre lebontani, és a megoldást igen gyorsan képesek szolgáltatni.

A következőkben megmutatjuk a diffeneciálegyenletek analóg áramkörökkel való megoldásának néhány alapvető esetét. A meghatározandó y(x) mennyiségnek a modellezés során az U(t) időfüggő feszültség felel meg. A t idő az x független változóval, az U feszültség pedig az y mennyiséggel arányos

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\tau}t \\ y &= \frac{1}{U_o}U \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x) = \frac{U(t)}{U_o} \qquad \textbf{(9)}$$

Ezt a formulát használjuk arra, hogy a differenciálegyenletet átírjuk olyan alakúvá, hogy azt a valóságban realizálni tudjuk. Ezt azért kell megtenni, mert az elérhető feszültség- és időtartományon belül kell maradni a megoldás során. Az átalakítás abban áll, hogy az x és y mennyiségekről a t és U mennyiségekre térünk át. Az U_o és τ konstansokat úgy választjuk meg, hogy a megoldás során a kívánt tartományban kapjuk meg az eredményt.

2.1. Elsőrendű egyszerű differenciálegyenlet

Az egyik legegyszerűbb differenciálegyenlet alakja a következő

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \textbf{(10)}$$

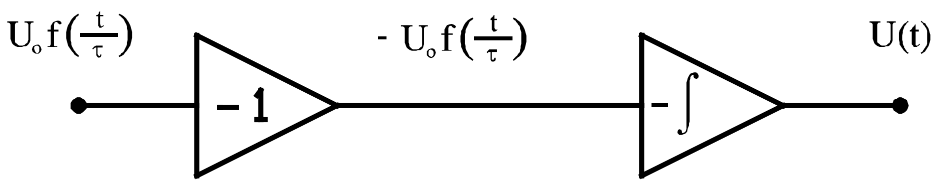
Az egyenlet megoldásának általános alakját integrálással adhatjuk meg

$$y(x) = y(0) + \int_0^x f(x)\,dx \qquad \textbf{(11)}$$

Bevezetve a t=τx és U=$U_o \cdot$ y változót, a (11) formula alakja

$$U(t) = U(0) + \frac{1}{\tau}\int_0^t U_o \cdot f\left(\frac{t'}{\tau}\right) dt' \qquad \textbf{(12)}$$

Ez a formula már egyszerűen realizálható. Célszerű a τ paraméter értékét az integrátor RC időállandójának választani - ahol R és C az integrátorban szereplő ellenállás és kapacitás értéke -, ekkor a megoldás a 6.ábrán látható módon végezhető el.



A feladat megoldásához az f(x) függvénynek megfelelő időfüggő $U_o \cdot$ f(t/τ) feszültséget kell előállítanunk, ezután az áramkör kimenetén kapjuk meg az egyenlet megoldását.

2.2. Egyszerű elsőrendű differenciálegyenlet megoldása

A fizikában igen gyakran előfordul az alábbi alakú differenciálegyenlet

$$\frac{dy}{dx} = -k \cdot y(x) \qquad \textbf{(13)}$$

Ilyen módon írható le például egy környezeténél melegebb test lehülése, radioaktív bomlás intenzitásának időfügése, kondenzátoron levő feszültség időbeli csökkenése, stb. Ennek az egyenletnek a megoldása

$$y(x) = y(0)\cdot e^{-k\cdot x} \qquad \textbf{(14)}$$

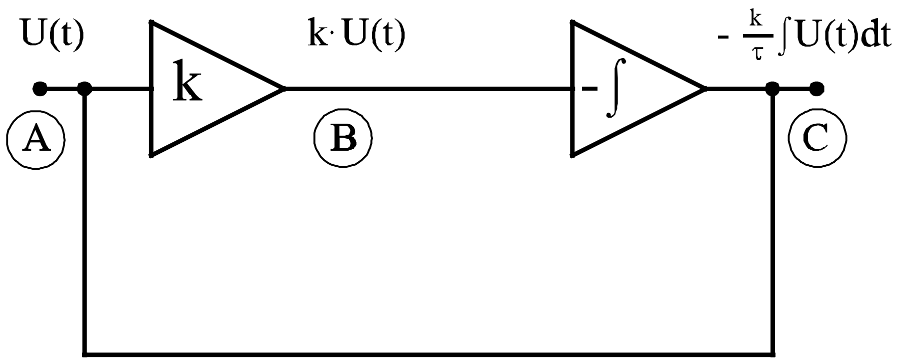
Analóg számítógéppel is megkaphatjuk a megoldást, ha az egyenletet integrálegyenletté alakítjuk

$$y(x) = y(0) - k\int_0^x y(x)\,dx \qquad \textbf{(15)}$$

Bevezetve az x változó helyett a t=τx időt (legyen τ=RC, az integrátor időállandója), az y helyett az $U=U_0\cdot y$ feszültséget

$$U(t) = U(0) - \frac{k}{\tau}\int_0^t U(t)\,dt \qquad \textbf{(16)}$$

Ezt az egyenletet az x.ábrán látható kapcsolás reprezentálja.



Hogyan működik ez a kapcsolás? Tegyük fel, hogy az A ponton az U(t) feszültség van. Szükségünk van az U(t) feszültség k konstanssal való szorzatára, ezt kapjuk a B ponton. Ezt a feszültséget integrálva megkapjuk az egyenlet jobb oldalán álló tagokat. Az U(0) tagot az integrálás kezdeti feltételével állíthatjuk be. Mivel az egyenlet baloldalán és jobboldalán álló mennyiségek megegyeznek, ezért a C és A pontokat egy vezetékkel összekötjük.

Ha biztosítjuk, hogy az integrátor kezdeti kimenő feszültsége -U(0) legyen, akkor az integrálás indításával előállíthatjuk az egyenlet U(t) megoldását az idő függvényeként.

Megjegyezzük, hogy ha τ=RC/k szerint választjuk meg a τ paramétert, akkor a kapcsolásból elhagyhatjuk a k-val szorzó tagot is, tehát a feladat egyetlen integrátorral is megoldható.

2.3. A csillapodó rezgés differenciálegyenletének megoldása

A csillapodó rezgéseket a következő alakú másodrendű differenciálegyenlet írja le

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \beta\frac{dy}{dx} + \gamma y = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

Analóg számítógéppel való megoldáshoz most is át kell térnünk az x,y mennyiségetkről a t időre és U feszültségre a t=τx és U=U_oy összefüggések felhasználásával. Ekkor

$$\frac{d}{dx} = \tau\frac{d}{dt}\ , \qquad \frac{d^2}{dx^2} = \tau^2\frac{d^2}{dt^2}\ ,$$
$$y\left(\frac{t}{\tau}\right) = U(t) \qquad \textbf{(18)}$$

így a következő differenciálegyenlethez jutunk

$$\tau^2\frac{d^2U(t)}{dt^2} + \tau\beta\frac{dU(t)}{dt} + \gamma U(t) = 0 \qquad \textbf{(19)}$$

Emeljük ki a differenciálást nem tartalmazó tagot, szorozzunk 1/τ-val és integráljunk idő szerint

itt U_1 integrálási konstans.

Újabb átrendezéssel

$$U_1 - \frac{1}{\tau}\int_0^t \gamma U(t)\,dt = \int_0^t \left[\tau \frac{d^2U(t)}{dt^2} + \beta \frac{dU(t)}{dt}\right] \qquad \textbf{(20)}$$

$$= \tau \frac{dU(t)}{dt} + \beta U(t)$$

$$U_A(t) + \beta U(t) = -\tau \frac{dU(t)}{dt} \qquad \textbf{(21)}$$

ahol bevezettük a

$$U_A(t) = -\left[U_1 - \frac{1}{\tau}\int_0^t \gamma U(t)\,dt\right] \qquad \textbf{(22)}$$

mennyiséget. Ismét szorozva 1/τ-val és integrálva jutunk

$$U_2 - \frac{1}{\tau}\int_0^t [U_A(t) + \beta U(t)] = U(t) \qquad \textbf{(23)}$$

itt U_2 a második integrálási konstans.

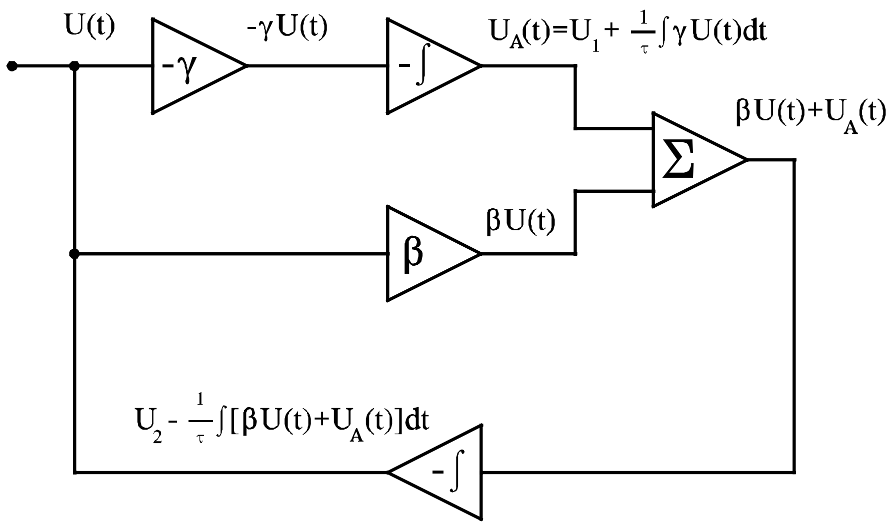
Az (23) egyenlet megoldását kaphatjuk meg, ha először előállítjuk az U_A mennyiséget, majd behelyettesítjük a (23) egyenletbe. Ennek analóg számítógépes realizálása látható a x.ábrán.

Az U(0) és dU/dt(0) kezdeti feltételeket ismerve beállíthatjuk az U_1, U_2 integrálási konstansokat. Egyszerűen látható, hogy U_2=U(0). Mivel

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}[U_A(t) + \beta U(t)] \qquad \textbf{(24)}$$

így

$$\left.\frac{dU(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}[U_A(0) + \beta U(0)] = \frac{1}{\tau}[U_1 - \beta U(0)] \qquad \textbf{(25)}$$



Ebből tehát az U_1 értéke is kiszámítható.

2.4. Az analóg számítógépes differenciálegyenlet-megoldás főbb lépéseinek összefoglalása

1. Az x,y változókról térjünk át a t időre és U feszültségre az alábbiak szerint

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\tau} t \\ y &= \frac{1}{U_o} U \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x) = \frac{U(t)}{U_o} \qquad \textbf{(26)}$$

ahol τ és U_o szabadon választható paraméter. Értéküket úgy válasszuk meg, hogy az x és y változó tartományának megfelelő t és U tartomány beleférjen, és lehető legjobban kitöltse az áramkörök tulajdonságai által rendelkezésre álló tartományt. Ez elsősorban a feszültségre vonatkozik, mert U értékének az áramkör minden pontján U_{min} és U_{max} közé kell esnie. U_{min} és U_{max} értékeit az aktív elemek (műveleti erősítők) tápfeszültsége határozza meg. A τ paraméter értékének sok esetben célszerű az integrátorok időállandóját választani.

2. Az egyenletet alakítsuk át integrálegyenletté. Ezt a

lépést a t és U új változók bevezetése előtt is megtehetjük.

3. Realizáljuk az egyenletnek megfelelő kapcsolást. A kapcsolás összeállításakor törekedjünk arra, hogy minél egyszerűbben, minél kevesebb áramköri elem felhasználásával oldjuk meg a problémát. Nagyobb kimenő ellenállású jeleket ne kössünk közvetlenül összegzők, integrátorok bemeneteire. Ilyen esetekben használjunk egyszeres erősítésű elválasztó erősítőket.

4. Állítsuk be az integrátorok kezdeti feltételeit. Vegyük figyelembe, hogy az integrátor kimenete véges idő alatt áll be a kívánt értékre. Ezt az integrátorok kimenetein a feszültség mérésével ellenőrizzük.

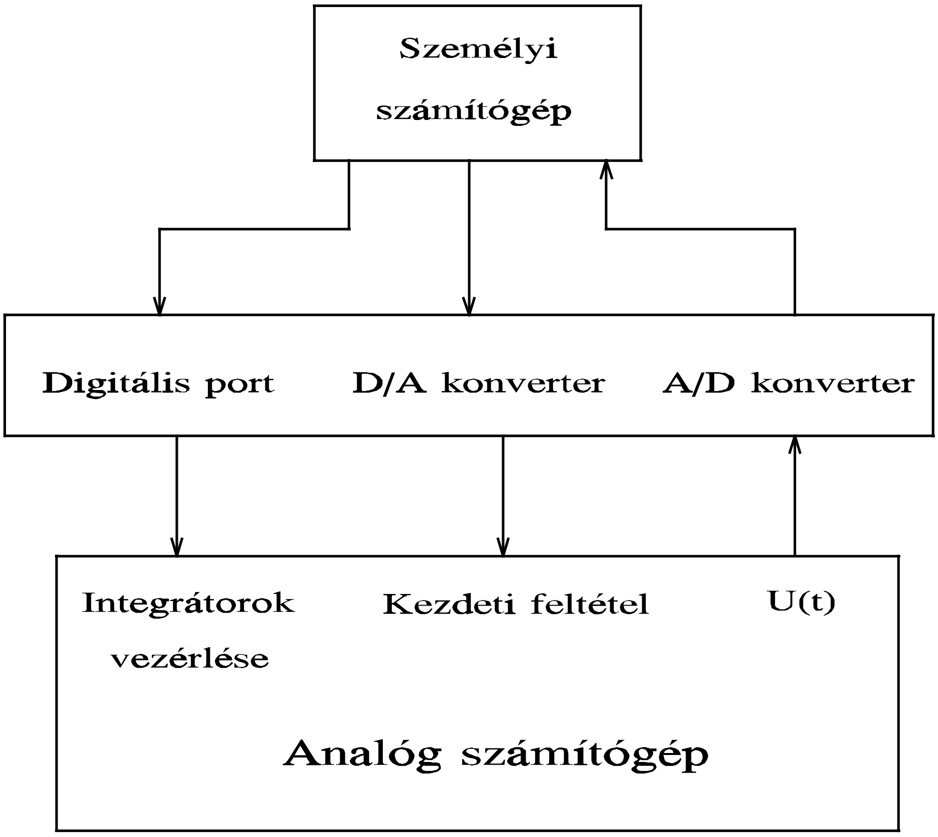
5. Az integrátorok kapcsolóit azonos időpillanatban kapcsolva indítsuk az egyenlet megoldását. Célszerű minden kapcsolót ugyanazzal a jellel vezérelni.

6. A mérést a kapcsolás lehető legtöbb pontján célszerű elvégezni, így az esetleges feszültség-túlcsordulásokat észleljhetjük.

3. A mérés menete

A feladatok megoldásának elve az x.ábrán látható. Először megtervezzük és összeállítjuk a differenciálegyenletet realizáló kapcsolást, majd a vezérlő és mérési pontokat a számítógépes mérőrendszerhez csatlakoztatjuk. A vezérlési pontok az integrálás indítását vezérlő K kapcsolók és az integrátorok kezdeti feltételének megadására szolgáló pontok. A K kapcsolókat a számítógép digitáis kimenetére kötve az egyenlet megoldásának kezdetét a mérőprogramból vezérelni tudjuk. A kezdeti feltételt a számítógéphez illesztett D/A konverterrel állíthatjuk be. A mérendő pontokat az A/D konverter bemeneteire kössük.

Az integrálás vezérléséhez a programban adjuk meg a mérés előtti és mérés alatti állapotokat. A mérés előtt legyen a vezérlő bit értéke 0, ekkor az integrátorok kimenetei beállnak a kezdeti feszültségre. Állítsuk a D/A konverter kimenetét a kívánt kezdő értéknek megfelelően. Vegyük figyelembe, hogy az integrátorok kimenetének kezdőértéke $-U_{D/A}$ (lásd 1.4 fejezet második része). A mérés közbeni értékek definiálásánál C0=1-et



adjunk meg, így a mérés indításakor C0 logikai 0 állapotról logikai 1 állapotra vált, és az integrálás ekkor indul meg. A D/A kimenet mérés alatti értékét a mérés előttivel azonosra definiáljuk.
A mérés indítása előtt még a mérendő bemeneteket, az adatok számát és a mérési időtartamot is adjuk meg.

4. Feladatok

1. Mérjük meg az integrátorok τ időállandóját 1 Volt konstans feszültség integrálásával.

2. Oldjuk meg analóg áramkörökkel a

$$\frac{dy}{dx} = -k \cdot y(x) \qquad \textbf{(27)}$$

differenciálegyenletet az $x_1=1$, $x_2=10$ tartományban, $k=7$, $y(x_1)=12$ feltétel mellett. Ábrázoljuk az y és log(y) mennyiségeket x függvényében a megadott tartományban. Az analitikus megoldás ismeretében ábrázoljuk a mért adatok hibáját.

3. Oldjuk meg analóg áramkörökkel a csillapodó rezgés differenciálegyenletét. A megoldást γ=1, β=0.5 és γ=1, β=0.1 esetekre végezzük el. Kezdetben a kitérés legyen egységnyi, a sebesség pedig nulla.

Határozzuk meg a csillapodási tényezőt és a csillapodó rezgés periódusidejét. Ábrázoljuk a kitérést az idő függvényében néhány periódusidőnyi tartományban. Az analitikus megoldás ismeretében ábrázoljuk a mért adatok hibáját.

5. Kérdések

1. Milyen hibákkal kell számolnunk a differenciálegyenletek analóg áramkörökkel való megoldása során?

2. Milyen lesz a kimenő jele ha az integrátornak, ha bemenetére konstans feszültséget kötünk? Mi történik, ha a bemenetet leföldeljük?

3. Egy R_o ellenálláson U(t) feszültséget vezetünk egy RC időállandójú integrátor bemenetére. Milyen lesz a kimeneti feszültség időfüggése?

4. Hogyan oldható meg a

$$\frac{dy}{dx} = -k \cdot y(x) \qquad \textbf{(28)}$$

differenciálegyenlet differenciáló körrel? Hogyan adható meg a kezdeti feltétel?

5. Adjuk meg a következő elsőrendű csatolt differenciálegyenlet-rendszer megoldását elvégző áramkör kapcsolását.

$$\frac{dy_1}{dx} = k_1 \cdot y_2$$
$$\frac{dy_2}{dx} = k_2 \cdot y_1 \qquad \textbf{(29)}$$